DIOPHANTE ET L'ALGÈBRE PRÉ-SYMBOLIQUE ([1])

Luis RADFORD

A l'hiver 1982, j'étais inscrit au cours du Professeur Georges Glaeser, de l'IREM de Strasbourg. Le cours avait lieu les mercredis, l'après-midi. Je me rappelle très bien, en rentrant chez moi, le soir, sous les flocons de neige, de mes efforts pour mettre un peu d'ordre dans mes idées, bousculées par les magnifiques leçons de mon cher maître. Qu'il veuille bien accepter ce petit travail comme gage de ma reconnaissance.

1. INTRODUCTION

L'étude du développement des idées mathématiques est devenue un sujet important dans le cadre de l'enseignement: en effet, la détection des obstacles rencontrés au long de la formation d'une théorie et la façon par laquelle ils ont été franchis peuvent donner aux professeurs une idée de la profondeur et de la nature de ces obstacles, et les aider dans la façon de mener l'apprentissage chez leurs élèves. Malheureusement, l'enseignement scientifique, tel qu'il est débité aujourd'hui, repose sur l'enseignement des notions sous sa forme achevée, et nie, par là, l'histoire des sciences.

En ce qui concerne l'algèbre, on peut se poser un certain nombre de questions, intéressantes à plusieurs points de vue: qu'est-ce qui est à l'origine de l'algèbre? Qu'est-ce que l'algèbre était au début? Quels problèmes l'algèbre était-elle censée résoudre? Quel était le rapport entre l'arithmétique et l'algèbre? Les réponses aux questions posées peuvent varier en fonction de ce que l'on comprend par *algèbre.* Le mot algèbre provient de l'expression arabe *al-jabr wa'l muqabala,* utilisée dans un texte écrit par Al-Khwarizmi au 9e siècle ap. J.-C. L'expression arabe désigne les opérations d'addition, soustraction, multiplication et division qu'on peut effectuer en vue de réduire une équation de premier ou de deuxième degré à une forme canonique. L'algèbre est donc, au 9e siècle, l'art de réduire et de résoudre des équations.

Dans la préface de son livre, contenue dans la traduction de Rosen, Al-Khwarizmi dévoile sa conception de l'utilité de l'algèbre: problèmes d'héritage, partitions, constructions de canaux, calculs géométriques, etc. Or, les problèmes ont toujours été à la base du développement des mathématiques. Si on regarde les mathématiques qui nous sont parvenues des plus anciennes civilisations (la Chine, l'Égypte, la Babylone, par exemple) on trouve des problèmes. Cependant, si on regarde de plus près, on se rend compte qu'avec Diophante on assiste à une nouvelle façon de résoudre des problèmes.

Pour montrer le contraste, prenons l'exemple de la mathématique babylonienne, et considérons le problème suivant :

Trouver les dimensions d'un rectangle d'aire 96 *et dont la somme de la base et de la hauteur est 20.*

Avec les notations algébriques modernes, le problème s'écrit :

$$x + y = 20$$
$$xy = 96.$$

Ce problème, dans lequel nous reconnaissons un problème de second degré, est appelé par Neugebauer (Neugebauer, 1952) la *"forme normale".* Il était au cœur même des mathématiques babyloniennes. Dans les centaines de problèmes contenus dans plus de 300 tablettes en rapport avec les mathématiques qui nous sont parvenues de la période qui s'étend de 1800 av. J.-C. jusqu'à 300 av. J.-C. (voir Neugebauer et Sachs, 1945), beaucoup de ces problèmes sont résolus en les ramenant à la *forme normale.*

[1] Cet article a été écrit dans le cadre d'une recherche subventionnée par le fond FCAR (Québec) (91-ER-0716). Il est est paru dans la revue canadienne "Bulletin AMQ" en décembre 1991 – mars 1992 et reproduit avec son aimable autorisation.

La résolution babylonienne consiste à opérer sur les chiffres donnés, d'après une suite d'instructions données par le scribe :

1. Diviser par 2 la somme des nombres: 20 + 2 = 10.
2. Élever au carré: 102 = 100.
3. Retrancher l'aire donnée, 96, à 100 : 100 - 96 = 4.
4. Extraire la racine carrée: 2.
5. La base est 10 + 2 = 12
   La hauteur est 10 - 2 = 8.

Cet exemple nous permet de voir que la résolution babylonienne, telle qu'elle nous est parvenue, repose sur un *enchaînement d'opérations numériques.* Il n'y a pas une inconnue mêlée aux calculs. Diophante d'Alexandrie (3e siècle ap. J.-C.), au contraire, dans son œuvre *Arithmétique,* introduit une inconnue sur laquelle il fait des calculs, pour résoudre des problèmes comme le précédent.

2. L'ARITHMÉTIQUE

2.1. La classification des nombres

L'Arithmétique de Diophante constitue une collection de problèmes dont certains proviennent probablement de Diophante même et d'autres faisaient partie de la tradition mathématique de l'époque. Au début du Livre l, Diophante écrit que *l'Arithmétique* comporte treize livres. Or, des treize livres, seulement six nous étaient parvenus, jusqu'à ce qu'en 1968 on découvrit un manuscrit - qui date de la fin du XIIe siècle - d'une traduction du grec à l'arabe de quatre autres livres, dans une bibliothèque à Meshed, une ville au nord-est de l'Iran.

Dans le livre 1 de *l'Arithmétique,* Diophante commence en faisant une classification des nombres: les carrés, les cubes, les bicarrés (qui sont formés en prenant un carré qu'on multiplie par lui-même), les carré-cubes (i.e. carrés multipliés par cubes, ayant même côté que ces carrés) et les cubocubes (ce que nous appelons la sixième puissance d'un nombre: a^6). Ces "catégories" sont donc engendrées par des multiplications à partir des catégories des carrés et des cubes.

Diophante introduit des *symboles* pour désigner les nombres précédents : ce sont des "désignations abrégées", dit-il.

carré : Δ^Y
cube : K^Y
carré-carré (ou bicarré) : $\Delta^Y \Delta$
carré-cube : ΔK^Y
cubo-cube : $K^Y K$.

2.2. L'arithme

L'idée que se fait Diophante de la nature arithmétique des nombres se reflète dans la classification précédente (qui diffère, par exemple, de celle de son prédécesseur Nichomaque de Gérase qui, lui, suit une classification des nombres d'après l'école pythagoricienne, en termes de nombres pairs et impairs), et va jouer un rôle important dans le type de problèmes sur lesquels il va s'arrêter. Mais ce sur quoi repose l'édifice diophantien est l'idée **d'arithme** : *"une quantité indéterminée d'unités"* .

Diophante élabore une théorie mathématique sur deux classes d'objets : les *nombres,* en tant que nombres invariants déterminés, c'est-à-dire, comme *"formés d'une certaine quantité d'unités"* (Ver Eecke, p. 1) ([2]) et *l'arithme.* Mais ce qui est très important est que l'arithme est assujetti aux même traitements que les nombres invariants déterminés :

> *"'De même que les parties aliquotes des nombres sont dénommées d'une manière correspondante à ces nombres, tel le tiers correspondant à trois, le quart correspondant à quatre, nous dénommerons aussi les parties aliquotes des nombres renseignés plus haut* [les arithmes] *d'une manière correspondante à ces nombres. Ainsi, pour l'arithme, nous dirons*

[2] Pour les traductions de *l'Arithmétique,* nous nous sommes basés sur les oeuvres de Ver Eecke, Sesiano et Rashed (cf. bibliographie).

l'inverse de l'arithme,. pour sa puissance, nous dirons l'inverse du carré [...]" (Ver Eecke; 1926, p. 3).

La nature des nouveaux objets (l'arithme, son carré, son inverse, etc), dans la construction diophantienne, est donc calquée sur celle des nombres concrets ou déterminés ([3]). Ces nouveaux objets possèdent une nouvelle dimension par rapport aux "nombres invariants déterminés" : un arithme *est* un nombre (dans le paragraphe cité ci-haut, Diophante se réfère aux arithmes comme *"les nombres renseignés plus haut"),* mais il est différent dans la mesure où il possède une quantité indéterminée d'unités. D'ailleurs, cette différence est accentuée par le symbolisme utilisé : pour désigner les nombres invariants déterminés, Diophante utilise le symbole *M,* alors que pour l'arithme il utilise la lettre grecque ς.

De plus, et de façon consistante avec son idée d'arithme, Diophante accorde à ces nouveaux objets les mêmes propriétés opératoires qu'aux nombres invariants déterminés, comme on peut le voir dans l'extrait suivant, pris de *l'Arithmétique***,** qui indique la façon d'opérer sur ce que nous appellerions des *monômes rationnels :*

> *"L'inverse de l'arithme multiplié par le bicarré de l'arithme donne le cube de l'arithme"* ([4]) (Ver Eecke; 1926, p. 5)

Mais le but de cette construction est de résoudre des problèmes: l'extrait suivant, placé après la classification des nombres et la façon de conduire les calculs sur les arithmes, selon des règles dont nous venons de donner un exemple, indique comment mener les opérations des expressions dans la **résolution de problèmes :**

> *"Il est utile que celui qui aborde ce traité se soit exercé à l'addition, à la soustraction et à la multiplication des espèces,* ([5]) *ainsi qu'à la manière d'ajouter des espèces positives et négatives avec des coefficients différents à d'autres espèces qui sont elles-mêmes positives, ou même positives et négatives; enfin à la manière de retrancher d'espèces positives et d'autres négatives, d'autres espèces soit positives, soit aussi positives et négatives. Ensuite, s'il résulte d'un problème que certaines expressions sont égales à des expressions identiques, mais avec des coefficients différents, il faudra retrancher de part et d'autre les* [espèces] *semblables des semblables, jusqu'à* ce *que l'on obtienne une seule espèce égale à une seule espèce"* ([6]), ([7]).

2.3. L'arithme et la résolution de problèmes

Voyons maintenant comment tout cet appareillage conceptuel est mis en œuvre pour résoudre des problèmes : prenons le problème qui correspond à la forme normale babylonienne qui se trouve dans l'introduction de cet article (il s'agit du problème 27 du livre 1 de l'Arithmétique). Le problème est énoncé par Diophante dans les termes suivants :

> *Trouver deux nombres dont la somme et leur produit forment des nombres donnés*

Il s'agit donc d'un problème que nos notations actuelles permettent d'écrire ainsi:

$$x+y=a$$

$$xy = b.$$

[3] Il faut dire ici que Diophante ne considère que les nombres rationnels positifs.

[4] C'est-à-dire: $(1/x)(x^4) = x^3$.

[5] $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ espèces, c'est-à-dire monômes.

[6] Il s'agit de transformer l'équation initiale et de l'amener à une équation de la forme $ax^n = bx^m$.

[7] Il est important de noter ici que Ver Eecke (1926) traduit $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ par expressions. Nous avons suivi, dans les premières phrases de ce texte, Heath (1964) et Rashed (1985) qui traduisent $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ par espèces. Par contre, nous avons laissé dans la deuxième phrase du texte - qui est basé sur la traduction de Ver Eecke (1926, p. 8) -, la traduction *expressions* car, dans ce contexte, Diophante se réfère à l' $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ (i.e. à la *figure* ou la *forme)* qui résulte des opérations entre espèces. Nous reviendrons sur cette distinction au §2.3.

> *"Proposons, dit Diophante, que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme* 96 *unités. Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est* 2 *arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté de 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres, donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est* 2 *arithmes.*
> *Il faut aussi que le produit des nombres forme* 96 *unités. Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme, ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient* 2 *unités. En conséquence, le plus grand nombre sera* 12 *unités et le plus petit sera* 8 *unités, et ces nombres satisfont la proposition" (Ver Eecke,.* 1926*, pp. 36-38).*

Cette résolution nous permet de voir qu'avec Diophante nous sommes en présence d'un changement conceptuel dans la façon d'aborder certains problèmes mathématiques : une quantité inconnue est mise en scène et cette quantité, l'arithme, va être prise en compte dans les calculs : on va opérer avec elle.

Mais outre le statut numérique d'inconnue, l'arithme permet, à son tour, la création de nouveaux objets mathématiques plus complexes: d'une part les $\varepsilon\iota\delta o\varsigma$ ou espèces, c'est-à-dire les monômes, qui se distinguent entre eux par leur nature arithmétique i.e. par leur "catégories" (carré, cube, bicarré, etc ([8])), et d'autre part les **expressions**. Dans l'extrait que nous avons placé à la fin du §2.2, Diophante se réfère, à plusieurs reprises, aux **espèces** ($\varepsilon\iota\delta o\varsigma$). La première partie de cet extrait se réfère en fait aux opérations entre espèces, c'est-à-dire aux opérations entre monômes, alors que la dernière partie se réfère au résultat de ces opérations, i.e. aux **expressions** et, plus précisément, à la façon de réduire (par soustraction) ces expressions à des espèces. Par là, Diophante commence la construction d'un nouveau langage : un **langage algébrique**.

2.4. Le langage algébrique chez Diophante

Nous avons vu précédemment que Diophante introduit certains symboles pour désigner le carré, le cube, etc et qu'il utilise le symbole ç pour désigner l'arithme. A l'aide de ces symboles il va construire un langage (avec une syntaxe bien définie) qui rend possible de représenter et les espèces et les expressions (ces dernières étant - rappelons-le - d'espèces (i. e. des monômes) opérées entre elles).

Les nombres invariants déterminés sont représentés en utilisant la notation alphabétique grecque ([9]); par exemple :

α désigne **1**, β désigne **2**, γ désigne **3**, …, θ désigne **9**,
ι désigne **10**, κ désigne **20**, λ désigne **30**, …, q désigne **90**.

Le nombre **12** est désigné par $\iota\beta$, le nombre **23** est désigné par $\kappa\gamma$, et ainsi de suite. Le tableau suivant résume la correspondance pour les premiers entiers :

$$\begin{array}{rl} 1-9 : & \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ ϛ\ \zeta\ \eta\ \theta \\ 10-90 : & \iota\ \kappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi\ o\ \pi\ q \end{array}$$

Dans le langage algébrique de Diophante, notre monôme $3x^2$ correspond à l'espèce $\Delta^y\gamma$. De même, $4x^5$ correspond à $\Delta K^y\delta$, alors que $33x$ correspond à $\varsigma\lambda\gamma$.

Pour écrire $33x + 8$, par exemple, Diophante place à droite le 8, qui est un nombre invariant déterminé (alors que 33 n'en est pas un : il indique qu'on a 33 arithmes), séparés par la lettre M du reste de l'écriture $\varsigma\lambda\gamma M\eta$. De même, $3x^2 + 12$ s'écrit :

$$\Delta^y\gamma M\iota\beta$$

[8] Cf. §2.1.
[9] Pour plus de détails voir, par exemple, Van der Waerden, 1961.

Les *expressions* se forment par juxtaposition. Ainsi, l'expression $\Delta K^y \delta K^y \varepsilon \Delta^y \kappa\varsigma\lambda\gamma M\eta$ correspond à $4x^5 + 5x^3 + 20x^2 + 33x + 8$.

La soustraction est dénotée par $\pitchfork$ Les termes négatifs dans une expression sont placés à la fin. Ainsi, $2x^3 - x^2 - 2x + 8$ s'écrit :

$$K^y \beta M\eta \pitchfork \Delta^y \alpha\varsigma\beta$$

Il est important de remarquer que l'arithme ne figure pas explicitement dans les puissances d'ordre ≥ 2. Ainsi, $K^y\ \beta$ signifie $2x^3$; de même, $\Delta^y \alpha$ signifie x^2. En effet, la méthode de Diophante, comme on peut l'apprécier déjà dans l'exemple précédent, met en scène seulement une inconnue: il n'y a donc pas lieu de préciser de quelle puissance il s'agit. D'autre part, étant donné que Diophante ne considère que des nombres positifs, une expression de type $\pitchfork \Delta^y \alpha\zeta\beta$ n'a pas de sens : le symbole $\pitchfork$ ne peut figurer au début d'une expression mais seulement à l'intérieur d'une expression.

À l'origine, le symbole, chez Diophante, correspond à une "désignation abrégée", comme nous l'avons remarqué au §2.1. Il s'agit en principe d'une utilisation des symboles en vue d'abréger le texte où l'on décrit la résolution d'un problème. Mais l'introduction de la syntaxe permet de créer un langage avec lequel on peut représenter (d'une façon fort efficace d'ailleurs) les opérations entre l'inconnue, les puissances de celle-ci et les nombres invariants déterminés.

Or, son efficacité ne se restreint pas uniquement au niveau des calculs. La symbolisation permet, en effet, d'organiser les opérations pertinentes à faire en vue d'isoler l'inconnue, comme on verra sur un exemple au §4. De par le caractère même de la méthode diophantienne (que nous analyserons plus en détail au §4), le langage mis en œuvre par Diophante aide la pensée à se dégager du contexte numérique dans lequel le problème est posé et de se concentrer sur un *calcul formel,* c'est-à-dire un calcul qui tient compte seulement de la forme (*ειδος*) des expressions.

3. L'arithmétique et le type de problèmes posés

Les problèmes contenus dans les 10 livres que nous possédons de l'Arithmétique sont des problèmes qui se réfèrent à des nombres et/ou des triangles rectangles. Tout rapprochement à une situation "réelle" est exclu : on ne trouve pas de problèmes appliqués au commerce, à l'agriculture ou à une autre situation concrète.

Les problèmes sont énoncés en mots et ils reflètent la structure de l'arithmétique d'après Diophante. Cette structure, comme nous l'avons déjà vue, repose sur le groupement des nombres par catégories (les carrés, les cubes, etc ...). Et les problèmes sur les nombres que Diophante entreprend de résoudre, proviennent justement "[...] soit de la somme de ces nombres, soit de leur différence, soit de leur multiplication, soit du rapport qu'ils ont entre eux, ou qu'ils possèdent respectivement avec leurs propres racines [.. .]" ([10]).

Une particularité des énoncés des problèmes est l'absence de nombres particuliers donnés.

Exemples ([11]) :

Livre 1, problème 16 :

Trouver trois nombres qui, pris deux à deux, forment des nombres proposés.

En notations modernes, le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ y+z &= b \\ z+x &= c \end{aligned}$$

[10] Cf. Ver Eecke, p. 2.

[11] D'après Sesiano (Sesiano, 1985), les quatre nouveaux livres trouvés, (i. e. les livres arabes) s'intercalent entre les trois premiers livres grecs (Livres 1, II et III) et les trois autres livres grecs, appelés jusqu'alors Livres IV, V et VI. Nous suivrons l'ordre indiqué par Sesiano, de sorte qu'on a: les trois premiers livres grecs (désignés toujours par Livres l, Il et III), les quatre livres arabes (désignés par Livres IV, V, VI et VII) et ensuite les autres livres grecs connus, qui seront désignés par Livres "IV", "V" et "VI".

où a, *b* et c sont les nombres proposés.

Livre II, problème 11 :

Ajouter un même nombre à deux nombres donnés de manière que chacun d'eux forme un carré.

C'est-à-dire, en notations modernes :

$$x + a = c^2$$
$$x + b = d^2$$

Livre IV, problème 6 ([12])

Trouvez un carré et un cube tel que leur produit soit un carré.

C'est-à-dire, en notations modernes :

$$x^2y^3 = u^2$$

Livre V, problème 5 :

Trouver deux nombres, l'un un cube et l'autre un carré, tel que si on multiplie le cube du cube par deux nombres donnés et on ajoute chacun de ces produits au carré du carré, le résultat est dans chaque cas un nombre carré.

C'est-à-dire, en notations modernes:

$$\left(x^2\right)^2 + a\left(y^3\right)^3 = u^2$$
$$\left(x^2\right)^2 + b\left(y^3\right)^3 = v^2$$

Livre "VI", problème 6 :

Trouver un triangle rectangle tel que le nombre de son aire, augmenté du nombre de l'une des perpendiculaires, forme un nombre donné.

C'est-à-dire, en notations modernes :

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$bc/2 + b = u.$$

Pour essayer d'expliquer le fait que les problèmes de *l'Arithmétique* de Diophante ne soient pas rattachés à des situations de la vie courante, Tannery ([13]) a suggéré que la personne à qui Diophante s'adresse au début du Livre I**,** le très honoré Dionysios, était l'évêque d'Alexandrie. Tannery conclut que l'Arithmétique était probablement destinée aux écoles de l'Église Catholique de l'époque, et que Diophante aurait été chrétien. Ainsi, les problèmes à enseigner devaient être dépourvus de tout aspect païen ([14]). Quoi qu'il en soit, beaucoup des problèmes de l'Arithmétique étaient connus avant Diophante. C'est le cas, par exemple, des problèmes 16 et 27 du Livre 1. En effet, le problème 27 (cf. §2-3) était un problème fondamental dans les mathématiques babyloniennes, comme nous l'avons déjà indiqué au §1; en ce qui concerne le problème 16 (énoncé ci-haut), Heath mentionne une règle, énoncée en mots, connue sous le nom de "flower or bloom of Thymaridas", qui exprimait la solution du problème, quoique au dire de Heath "the rule is stated in general terms and no symbols are used [.. .]. The rule is very obscurely worded [...]". (Heath, 1921, Vol. 1, p. 96). Mais pour mieux apprécier l'apport de Diophante, voyons de plus près comment il résoud ce problème.

4. La méthode de l'inconnue opérationnelle

Le problème 16 du Livre 1 s'écrit, en notations modernes :

[12] La traduction en français que nous faisons de ce problème et du suivant est basée sur la traduction anglaise de Sesiano.
[13] Nous suivons ici Ver Eecke (Ver Eecke ; 1959, pp. xv-xvi).
[14] La seule exception constitue le problème 30 du livre "V", où il est question d'un mélange de vin. Mais l'authenticité de ce problème a été mise en doute : il aurait été ajouté par un scribe.

$$x+y=a$$
$$y+z=b$$
$$z+x=c$$

Diophante choisit a = 20 unités, b= 30 unités et c = 40 unités. Ensuite, il dit :

	Traduction abrégée en langage algébrique moderne
"Posons que la somme des trois nombres est ςα (1 arithme). *Dès lors, puisque le premier nombre plus le second forment Mκ (20 unités), si nous retranchons Mκ, (20 unités) de ςα* (1 *arithme), nous aurons comme troisième nombre ςα ⋔ Mκ, (1 arithme moins 20 unités).*	$x + y + z = 1A$ $x + y = 20$ Donc $z = 1A - 20$
Pour la même raison, le premier nombre sera ςα ⋔ Mλ (1 arithme moins 30 unités), et le second nombre sera ςα ⋔ Mμ (1 arithme moins 40 unités).	De même, $x = 1A - 30$ et $y = 1A - 40$
Il faut encore que la somme des trois nombres devienne égale à ςα (1 arithme).	Or, $x + y + z = 1A$
Mais la somme des trois nombres forme ςγ ⋔ Mq (3 arithmes moins 90 unités). Égalons-les à ςα (1 arithme) et l'arithme devient Mμε (45 *unités).* *Revenons à ce qui a été posé: le premier nombre sera Mιε* (15 *unités), le second sera Mε* (5 *unités) et le troisième sera Mκε (25 unités), et la preuve est claire."*	Mais $x + y + z = 3A - 90$ Donc $3A - 90 = 1A$ et on obtient $A = 45$. De là on obtient : $x = 15$ $y = 5$ $z = 25$.

Grosso modo, on peut dire que pour résoudre les problèmes qu'il se pose, Diophante commence par énoncer une condition de nécessité sur les paramètres, s'il y a lieu ([15]); ensuite il exprime les nombres cherchés (les inconnues du problème) en termes de cette inconnue opérationnelle qu'est l'arithme. Une fois cette étape franchie, une mise en équation a lieu, à partir des conditions du problème. Ensuite, des opérations sont effectuées sur l'équation obtenue afin de dégager la valeur de l'arithme. Quand cette valeur est trouvée, Diophante revient aux relations qui lient les inconnues du problème à l'arithme et trouve celles-là en remplaçant l'arithme par sa valeur. La dernière étape de la résolution consiste à vérifier que les nombres ainsi trouvés répondent bien aux exigences du problème. Souvent cette vérification n'est pas menée à terme (sans doute parce qu'elle consiste en de simples opérations entre nombres), et Diophante se contente de dire "et ces nombres satisfont à la proposition".

Il est clair que dans le problème précédent, un autre choix de *a, b* et c conduit à une valeur différente pour *x, y* et *z.* Le résultat dépend du choix qu'on fait des nombres "donnés", *a, b* et c. À la lumière des mathématiques actuelles ces nombres deviennent des **paramètres**, comme on dit aujourd'hui; ils ont un statut différent de celui des inconnues. Or, Diophante ne se pose pas le problème d'expliciter **toutes** les solutions: il cherche à montrer comment sa méthode - que nous appellerons **méthode de l'inconnue opérationnelle** – fonctionne et peut produire autant de solutions qu'on voudra: elle apparaît ainsi comme un **programme**. Il est clair que Diophante distingue parfaitement le statut des paramètres et celui des inconnues. Mais il ne symbolise point les paramètres : ceux-ci restent au niveau numérique. En fait, la symbolisation des paramètres est inconcevable chez Diophante. Cette symbolisation est beaucoup plus tardive dans l'histoire de l'algèbre: elle se trouve dans l'œuvre de Viète, et permet d'écrire la solution d'un problème en toute généralité.

[15] Nous reviendrons sur cette condition de nécessité au §4.2.

4.1. Le succès de la méthode

Le succès de la méthode de l'inconnue opérationnelle repose, en particulier, sur trois éléments :

- le bon choix des paramètres,
- le choix des relations qui lient les inconnues du problème à l'inconnue opérationnelle, c'est-à-dire l'arithme,
- la faisabilité de la résolution.

4.2. Le bon choix des paramètres

Étant donné que Diophante ne considère que des solutions rationnelles positives, il est contraint de choisir les paramètres de sorte que sa méthode n'aboutisse pas, à la suite du calcul formel, à une valeur négative ou irrationnelle. Ainsi, dans le problème 16 du Livre 1, cette contrainte se manifeste par une condition de nécessité avec laquelle Diophante commence la solution: dans ce problème, Diophante dit : "Il faut toutefois que la moitié de la somme des nombres proposés soit plus grande que chacun de ces nombres". Le choix des paramètres dans ce problème est cohérent avec cette condition: en effet, les paramètres sont, comme nous l'avons vu, $a = 20$, $b = 30$ et $c = 40$. La moitié de la somme de ces nombres est 45 et elle est plus grande que chacun des nombres. Mais si nous prenons $a = 5$, $b = 5$ et $c = 80$, la condition n'est plus remplie. En effet, si maintenant nous appliquons la méthode de Diophante avec ce dernier choix de *a, b* et *c*, nous nous apercevons que l'arithme est à nouveau égale à 45 unités, mais dans ce cas, le troisième nombre serait 1 arithme moins 80 unités, c'est-à-dire, 45 unités moins 80 unités, ce qui, pour Diophante, est un résultat inadmissible . . .

Diophante ne montre pas dans *l'Arithmétique* comment il parvient à trouver les conditions nécessaires sur "les nombres donnés" (les paramètres) pour le bon fonctionnement de sa méthode. En tout cas, cela montre qu'il disposait de moyens efficaces pour y parvenir; le rôle du symbolisme dans les moyens détecteurs de conditions nécessaires est quelque chose d'encore non connu.

4.3. Le choix des relations et la faisabilité de la solution

Pour pouvoir-mettre en oeuvre la méthode de l'inconnue opérationnelle, Diophante doit choisir certaines relations afin de lier l'inconnue opérationnelle aux inconnues du problème. Mais, d'autre part, son choix doit être tel que l'équation à laquelle il aboutit n'entraîne pas de solutions négatives ou irrationnelles.

Le choix des relations chez Diophante rend sa résolution des problèmes différentes de ce que nous enseignons à nos étudiants d'algèbre aujourd'hui. C'est que la méthode de Diophante ne met pas en face directement les données et les inconnues du problème, comme c'est en général le cas avec nos méthodes actuelles, mais tous ces nombres pivotent autour d'une seule quantité indéterminée: l'arithme. Donc notre **traduction du problème** sous forme d'équation(s), n'est pas la même. La "mise en équation" dépend des méthodes que nous avons à notre disposition.

Or, fréquemment, les relations qui lient les inconnues du problème à l'arithme ne peuvent pas être perçues a priori; Diophante s'appuie alors sur une variante de la méthode de **fausse position**. Dans le problème 6 du Livre "VI", énoncé ci-haut, Diophante part d'un triangle dont les côtés sont 3 arithmes, 4 arithmes et 5 arithmes et, ayant choisi le paramètre égal à 7, la condition de l'aire du triangle plus une perpendiculaire égale à ce paramètre donne :

$$6x^2 + 3x = 7 \quad (x \text{ désigne l'arithme}).$$

Il s'agit alors de résoudre cette équation. À ce sujet, il dit :

> *"Il faut que la moitié de la quantité d'arithmes multipliée par elle-même, et à laquelle on ajoute la quantité de carrés d'arithmes, multipliée par la quantité d'unités, forme un carré. Or elle ne forme pas un carré"* ([16]).

[16] Diophante affirme que $(3/2)^2 + 6 \times 7$ doit être un carré. Si nous désignons par d cette quantité, le discriminant D (au sens actuel du terme) de l'équation $6x^2 + 3x - 7 = 0$ vérifie $D = 4d$. Ainsi, pour que l'arithme soit rationnel, la quantité d doit être un carré.

Alors, Diophante retient la condition précédente sur les coefficients de l'équation et il cherche un nouveau triangle rectangle qui vérifie cette dernière condition. À l'aide de sa méthode de l'inconnue opérationnelle, il trouve le triangle 24, 7 et 25. Alors, il recommence son raisonnement initial en remplaçant le triangle original 3 arithmes, 4 arithmes et 5 arithmes, par le triangle 24 arithmes, 7 arithmes et 25 arithmes. Maintenant la mise en équation (qui s'obtient à partir de la condition de la somme de l'aire avec une des perpendiculaires égale à 7) l'amène à l'équation $84x^2 + 7x = 7$, qu'il sait résoudre : il donne $x = 1/4$ comme solution, de sorte que le triangle cherché est : 6 unités, 7/4 et 25/4.

5. SYNTHÈSE ET CONCLUSION

En regardant l'activité mathématique dans les anciennes civilisations, on peut distinguer, d'après Van der Waerden (1983), deux grands courants: une activité mathématique destinée aux constructions géométriques liées aux applications rituelles, activité dont la transmission était essentiellement orale, et, d'autre part, une activité mathématique inscrite dans la tradition scolaire qui était à la base de l'enseignement des mathématiques. C'est dans cette tradition qu'on trouve les textes comportant des suites de problèmes suivis de leur solution. Et c'est justement dans cette tradition qu'il faut situer *l'Arithmétique* de Diophante.

Or, s'il est vrai que le premier courant de l'activité mathématique aboutit à une organisation déductive de la géométrie, telle qu'on la trouve dans les *Éléments* d'Euclide, il est vrai aussi que c'est avec Diophante que le deuxième courant connaît une apothéose semblable à celle connue par le premier, grâce à l'explicitation d'une méthode de résolution que nous avons appelée la *méthode de l'inconnue opérationnelle* et qui diffère des méthodes algébrico-géométriques qu'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide. Toutefois, restreindre la portée de l'œuvre de Diophante à la méthode revient à laisser de côté un autre aspect de son œuvre aussi important que la méthode elle-même, à savoir, le langage qu'il construit.

Sa méthode repose sur l'introduction d'une quantité inconnue à laquelle sont reliées les vraies inconnues du problème. La mise en scène de cette inconnue au même titre que les nombres concrets (i.e. les nombres invariants déterminés), constitue un véritable changement conceptuel dans la résolution de problèmes et donne lieu à une théorie arithmétique ouvrant de nouvelles perspectives.

Il est important de souligner que la portée de la méthode va se trouver limitée par le fait même qu'elle ne met en jeu qu'une inconnue. Mais en même temps, cela laisse entrevoir la difficulté sous-jacente à une démarche intellectuelle qui suppose l'organisation de plusieurs choses non connues (i.e. des inconnues) à la fois, à plusieurs niveaux : au niveau de la symbolisation, au niveau des opérations, au niveau heuristique. . .

À 180base du langage qu'il construit se trouve l'idée de la symbolisation de l'arithme et des catégories arithmétiques des nombres (les carrés, les cubes et les combinaisons multiplicatives de ceux-ci). Le langage apparaît, en premier lieu, comme une abréviation du langage naturel, mais le fait de lui associer une syntaxe convenable - en vue de rendre efficacela méthode de résolution de problèmes – fait de lui un outil puissant. Ce langage permettra, en particulier, la transformation du problème initial en un problème différent (portant sur des expressions algébriques) où la priorité est donnée au calcul formel, c'est-à-dire, au calcul des *espèces,* pour utiliser le terme de Diophante.

L'idée d'arithme comme un nombre *indéterminé* d'unités - dont la valeur sera révélée à la fin des calculs - est en somme un artifice heuristique. C'est à partir de l'arithme que Diophante crée une algèbre (avec la règle de restauration dont parlera AI-Kwharizmi quelques siècles plus tard) qui apparaît donc comme une généralisation provisoire de l'arithmétique. Les expressions et tout le langage algébrique disparaissent à la fin d'un problème pour renaître au suivant. Ainsi, de par sa profonde dépendance à l'égard de l'arithmétique, les symboles de Diophante n'ont pas la permanence et l'autonomie de l'algèbre postérieure, permanence et autonomie qui se trouvent chez Viète, à la fin du XVIe siècle. La théorie arithmétique de Diophante, qui nous laisse voir une des facettes historiques de l'émergence de l'algèbre, peut être donc considérée par rapport à l'algèbre de Viète comme une algèbre pré-symbolique.

6. **BIBLIOGRAPHIE**

HEATH L. (1910).- *Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek Aigebra.*- Deuxième édition. Cambridge University Press. Réimpression Dover, 1964.

HEATH L. (1921).- *A history of Greek Mathematics.*- Vol. I. Oxford. New-York.

NEUGEBAUER O. (1952).- *The exact sciences in antiquity.*- Princeton, New Jersey.

NEUGEBAUER O. and SACHS A. (1945).- *Mathematical Cuneiform Texts.*- American Oriental Society. American Oriental Series. Vol. 29. New Haven. Connecticut

RASHED R. (1985).- *Entre l'Arithmétique et l'Algèbre. Recherches sur l'Histoire des Mathématiques Arabes.*- Les belles lettres. Paris.

RASHED R. (1975).- Les Travaux Perdus de Diophante (11).- *Revue d'Histoire des Sciences.*- Vol. XXVIII/l. pp.3-30. France.

RASHED R. (1974).- Les Travaux Perdus de Diophante (1).- *Revue d'Histoire des Sciences.*- Vol. XXVII/2. pp. 97-122. France.

ROBBINS F. - KARPINSKI L. (1926).- *Nichomachus of Geresa. Introduction to Arithmetic.*- The Macmillan Company. New-York.

SESIANO J. (1982).- *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetic.*- Springer-Verlag. New-York.

VAN der WAERDEN B.L. (1983).- *Geometry and Aigebra in Ancient Civilizations.*- Springer- Verlag. Berlin.

VAN der WAERDEN B.L. (1961).- *Science Awakening.*- Oxford University Press. New-York.

VER EECKE P. (1926).- *Diophante d'Alexandrie. Les Six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones.*- Desclée de Brouwer. Liège. Réimpression. Albert Blanchard. Paris, 1959.