Chapitre **1**

# Séries de Fourier

**Exercice 1.1.** *ENSEA PC 2007, ODT page 29*

> Montrer qu'il existe une suite $a_n$ de nombres réels telle que pour tout nombre complexe $z$ vérifiant $|z| = 1$ on ait $\dfrac{z}{2z^2+5z+2} = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n + z^{-n})$.
>
> En déduire le développement en série de Fourier de la fonction $f : \theta \mapsto \dfrac{3}{5+4\cos\theta}$.

**Solution** On a $2z^2+5z+2 = 2\big(z+2\big)\big(z+\frac{1}{2}\big)$.
Déterminons deux constantes $A$ et $B$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \frac{z}{2z^2+5z+2} = \frac{A}{z+\dfrac{1}{2}} + \frac{B}{z+2}.$$

Comme $\dfrac{A}{z+\dfrac{1}{2}} + \dfrac{B}{z+2} = \dfrac{(A+B)z+\dfrac{1}{2}B+2A}{2z^2+5z+2}$ il suffit que $(A,B)$ soit solution du système :

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+\frac{1}{2}B=0. \end{cases}$$

On en déduit aisément $A = -\frac{1}{3}$ et $B = \frac{3}{3}$. On a alors si $|z| = 1$ :

$$\frac{z}{2z^2+5z+2} = -\frac{1}{3}\frac{1}{z\left(1+\dfrac{1}{2z}\right)} + \frac{4}{3}\frac{1}{2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)}.$$

D'où puisque $\dfrac{1}{2\,|z|} < 1$ et $\dfrac{|z|}{2} < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{2z^2+5z+2} &= -\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^{-n}z^{-n-1}\right) + \frac{2}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n\right)\\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} z^{-n} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} z^n\\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(z^n + z^{-n})\\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}(z^n + z^{-n})
\end{aligned}$$

Soit $\theta$ un nombre réel et $z = e^{i\theta}$. On a $|z| = 1$ et

$$\frac{z}{2z^2+5z+2} = \frac{1}{2z+5+2z^{-1}} = \frac{1}{2e^{i\theta}+5+2e^{-i\theta}} = \frac{1}{5+4\cos\theta}.$$

On a aussi $z^n + z^{-n} = e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos(n\theta)$.

On en déduit que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = \frac{1}{5+4\cos\theta} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta). \tag{1}$$

Nous allons démontrer que la relation $(1)$ est précisément le développement en série de Fourier de $f$.

Commençons par déterminer les coefficients de Fourier $f$.

Comme $f$ est paire les coefficients $b_p(f)$ sont nuls pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour calculer les coefficients $a_p(f)$ nous utilisons la relation $(1)$ qui montre que $f$ est la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $v_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v_n(\theta) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta)\cos(p\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $\|v_n\|_\infty = \dfrac{4}{3\cdot 2^n}$.

La série de fonction $\sum v_n$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On peut donc intégrer terme à terme sur le segment $[0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned}
a_p(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(p\theta)\,d\theta\\
&= \frac{2}{3}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(p\theta)\,d\theta + \frac{4}{3}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

Or on sait que

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p, \\ 2\pi & \text{si } n = p = 0, \\ \pi & \text{si } n = p \neq 0. \end{cases}$$

On en déduit que $a_0(f) = \frac{4}{3}$ et $a_p(f) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ si $p \geqslant 1$.

Comme la fonction $f$ est $2\pi$-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à $f$ (c'est le théorème de convergence normale). La relation $(1)$ est donc bien le développement en série de Fourier de $f$.

**Exercice 1.2.** *CCP PSI 2008, ODT page 27*

> Etudier la série de Fourier de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$ où $\lambda$ est un nombre réel tel que $-1 < \lambda < 1$.

**Solution** Posons $u_\lambda(x) = \lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $u_\lambda(x) = (\lambda - \cos x)^2 + (1 - \cos^2 x) \geqslant 0$. Comme $(\lambda - \cos x)^2 \geqslant 0$ et $1 - \cos^2 x \geqslant 0$, $u_\lambda(x)$ est nul si et seulement si $1 - \cos^2 x = 0$ et $\lambda - \cos x = 0$, c'est à dire si et seulement si $\lambda = \cos x = \pm 1$.

Il en résulte que $u_\lambda(x) > 0$ lorsque $\lambda \in \,]-1, 1[$.

La fonction $f$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est $2\pi$-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de $f$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à $f$. Comme $f$ est une fonction paire, les coefficients de Fourier trigonométriques $b_n(f)$ sont nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculons les coefficients de Fourier $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos(nx)\,dx$.

Pour $n = 0$ on calcule l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\lambda^2 - 2\lambda\cos x + 1}$ à l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$. De façon précise l'application $x \mapsto \tan\frac{x}{2}$ est un difféomorphisme de l'intervalle $[0, \pi[$ sur l'intervalle $[0, +\infty]$. On a alors $dt = \frac{1}{2}(1 + t^2)dx$ et

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, d'où

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\lambda^2 - 2\lambda\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)}\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(\lambda^2+1)(1+t^2)-2\lambda(1-t^2)}\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(\lambda+1)^2t^2+(\lambda-1)^2}\\
&= \frac{2}{(\lambda+1)^2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a^2},\ \text{avec } a = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.
\end{aligned}$$

Or on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\left[\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a}$.

On en déduit que $I = \dfrac{\pi}{(\lambda+1)^2}\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{\pi}{1-\lambda^2}$ et enfin : $a_0(f) = \dfrac{2}{1-\lambda^2}$.

Calculons maintenant $a_1(f)$. On a $(1+\lambda^2)f(x) - 2\lambda f(x)\cos x = 1$. Il en résulte que $(1+\lambda^2)a_0(f) - 2\lambda a_1(f) = 2$ et on a donc lorsque $\lambda \neq 0$, $a_1(f) = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}$.

Pour $\lambda = 0$ on a $f(x) = 1$ et donc $c_1(f) = 0$. On a donc $c_1(f) = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}$ pour tout $\lambda \in \,]-1,1[$.

Nous allons maintenant établir, dans le cas où $\lambda \neq 0$, une relation de récurrence linéaire entre les coefficients $a_n(f)$. Pour cela nous partons des relations

$\cos(n+2)x + \cos(nx) = 2\cos\dfrac{(n+2)x+nx}{2}\cos\dfrac{(n+2)x-nx}{2} = 2\cos(n+1)x\cos x$

et $(1+\lambda^2)f(x) - 2\lambda\cos x f(x) = 1$.

On en déduit que $(1+\lambda^2)f(x)\cos(n+1)x - \lambda f(x)(\cos(n+2)x + \cos(nx)) = \cos(n+1)x$ puis par intégration que :

$$(1+\lambda^2)a_{n+1}(f) - \lambda(a_n(f) + a_{n+2}(f)) = 0.$$

C'est une relation de récurrence linéaire du second ordre dont l'équation caractéristique $\lambda r^2 - (1+\lambda^2)r + \lambda = 0$ admet deux racines réelles : $r_1 = \lambda$ et $r_2 = \dfrac{1}{\lambda}$.

Il en résulte qu'il existe deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que $a_n(f) = A\lambda^n + B\dfrac{1}{\lambda^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les constantes $A$ et $B$ sont déterminées par les conditions initiales $a_0(f) = A + B = \dfrac{2}{1-\lambda^2}$ et $a_1(f) = A\lambda + B\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda^2}$.

On en déduit aisément $A = \dfrac{2}{1-\lambda^2}$ et $B = 0$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{2\lambda^n}{1-\lambda^2}$.

Cette dernière égalité est encore vérifiée lorsque $\lambda = 0$ puisque $f$ est la fonction constante égale à $1$.

**Exercice 1.3.** *Centrale-Supélec PC 2007, ODT page 11*

> Soit $f$ la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$.
>
> 1) Vérifier que $\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(nx)}{n^2}$ sans, puis avec l'aide de Maple.
>
> 2) Montrer que la fonction $g$ définie par $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(nx)}{n^2(n^2+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-\pi, \pi]$ et tracer son graphe à l'aide de Maple.
>
> 3) Trouver une équation différentielle vérifiée par $g$ et faisant intervenir $f$. En déduire $g$.
>
> 4) Comment calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ à l'aide des questions précédentes ?

## Solution

1) Comme $f(-\pi) = f(\pi)$, il existe une fonction $2\pi$-périodique dont la restriction à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ est égale à $f$. On remarque que la fonction $g$ est paire, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Sa série de Fourier est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à $g$. On a $a_0(g) = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)dx = 0$ et on obtient pour $n \geqslant 1$, à l'aide de deux intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right\} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

Le théorème de convergence normale montre alors que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(nx)}{n^2}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}\cos(nx)}{n^2(n^2+1)}$.

Chaque fonction $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $R$ et $u_n''(x) = -\dfrac{(-1)^{n+1}\cos(nx)}{n^2+1}$. Les séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la somme $g$ de la série $\sum u_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(nx)}{n^2+1}.$$

3) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2(n^2+1)} = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^2+1}$ et il en résulte que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) + g''(x)$. Ainsi la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{x^2}{4}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$. O Cherchons une solution de l'équation complète de la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$. On alors $y'' - y = -ax^2 - bx - c + 2a$. Il suffit donc de prendre $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ et $c = -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12}$. Il existe donc deux constantes réelles telles que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], g(x) = Ae^x + Be^{-x} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12}.$$

Comme $g$ est paire on a nécessairement $A = B$ et donc $g(x) = 2A \operatorname{ch} x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12}$. On peut déterminer la constante $A$ en calculant le coefficient de Fourier $a_0(g)$. La convergence normale de la série $\sum u_n$ montre que l'on peut intégrer terme à terme :

$$a_0(g) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^2+1)} \int_0^\pi \cos(nx)\, dx = 0$$

.

On en déduit que $2A\big[\operatorname{sh} x\big]_0^\pi - \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{12} = 0$ et donc $A = \frac{\pi}{4 \operatorname{sh} \pi}$. On a donc

$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ g(x) = \frac{\cosh(x)}{2 \operatorname{sh} \pi} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12}.$$

4) On a $f(\pi) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{4} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ d'où on déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

De même on a $g(\pi) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi^2}{6} + g(\pi) = \frac{\pi \operatorname{ch} \pi}{2 \operatorname{sh} \pi} - \frac{1}{2}$.

**Exercice 1.4.** *ENSAM PSI 2008, ODT page 31*

> On note $E(t)$ la partie réelle d'un nombre réel $t$. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2\pi} - E\left(\frac{x}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ? Tracer son graphe.
>
> Calculer les coefficients de Fourier de $f$.
>
> Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Solution** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\frac{x+2\pi}{2\pi} = \frac{x}{2\pi} + 1$ et $E\left(\frac{x+2\pi}{2\pi}\right) = E\left(\frac{x}{2\pi}\right) + 1$. Il en résulte que $f(x+2\pi) = f(x)$. La fonction $f$ est donc $2\pi$-périodique. Déterminons sa restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Pour $x \in [0, 2\pi[$, on a $0 \leqslant \frac{x}{2\pi} < 1$ et donc $f(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}$. En particulier $f(0) = -\frac{1}{2}$. A cause de la $2\pi$-périodicité on a $f(2\pi) = f(0) = -\frac{1}{2}$ mais $\lim_{x \to 2\pi^+} f(x) = \frac{1}{2}$. La fonction $f$ n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle n'est donc pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Cependant sa restriction à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Le tracé suivant (cf. fig.0.1) a été obtenu à l'aide de `Maple` :

```
f:=x->x/(2*Pi)-floor(x/(2*Pi))-1/2;
plot(f(x),x=-2*Pi..4*Pi,thickness=3,tickmarks=[4,2],
discont=true,labels=[x,y]);
```

Calculons les coefficients de Fourier de $f$. La fonction $f$ est discontinue en chaque point $x_k = 2k\pi$. Il peut être judicieux de modifier la valeur de $f$ en chacun de ces points et de remplacer la valeur $f(2k\pi) = -\frac{1}{2}$ par la demi-somme des limites au gauche et à droite, c'est à dire par $0$. Ainsi modifiée la fonction est impaire et ses coefficients de Fourier ne sont pas modifiés. On a donc $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

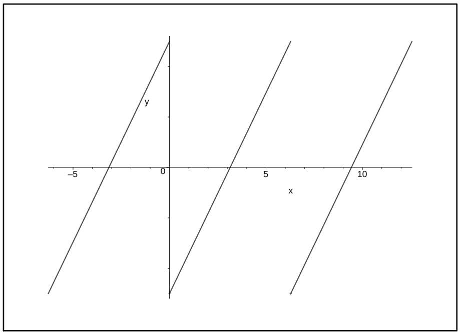


**FIG. 0.1.** Graphe de $f$

Calculons $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{2}\right)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{2}\right)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi^4}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

On peut vérifier ce résultat à l'aide des instructions suivantes de `Maple` :

```
assume(n,integer);
b:=n->(2/pi)*int(f(x)*sin(n*x),x=0..Pi);
b(n);
```

Grâce au théorème de Dirichlet on voit que la série de Fourier de $f$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est égale à $f(x)$ en chaque point $x$ où $f$ est continue. (Aux points de discontinuité la somme de la série de Fourier est la demi-somme des limite à gauche et à droite de $f$. Elle est donc égale à $0$.)

En particulier on a pour tout $x \in \,]0, 2\pi[$,

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n\pi}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $f(\pi/2) = -\frac{1}{4} = -\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin((2p+1)\pi/2)}{(2p+1)\pi}$, d'où puisque $\sin((2p+1)\pi/2) = (-1)^p$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$.

La formule de Parseval s'écrit $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2dx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}$.

On calcule facilement $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2dx = \frac{1}{6}$ (on peut aussi confier le calcul à `Maple`). On en déduit $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Exercice 1.5.** *Mines-Ponts PC 2008, ODT page 17*

> Résoudre l'équation différentielle $(E)$ $y + y' + y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$.

**Solution** Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre. Notons que le second membre de l'équation $(E)$ est la somme d'une série trigonométrique normalement convergente sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique $r^2+r+1 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y' + y = 0$ sont donc les fonctions de la forme $y\colon x \mapsto Ae^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ où $A$ et $B$ sont des nombres réels arbitraires.

Cherchons une solution particulière $y_0$ de $(E)$ de la forme de le somme d'une série de fonctions trigonométriques $y_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

avec $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, où $(a_n)$ et $(b_n)$ sont deux suites de nombres réels telles que $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$ et $b_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Les séries de fonctions $\sum u_n$, $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$ sont alors normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ puisque $\|u_n\|_\infty \leqslant |a_n| + |b_n| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$, $\|u_n'\|_\infty \leqslant n(|a_n| + |b_n|) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\|u_n''\|_\infty \leqslant n^2(|a_n| + |b_n|) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On peut donc utiliser le théorème de dérivation terme à terme pour calculer $y_0'$ et $y_0''$ : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$
$$y_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)\big)$$
$$y_0''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(-n^2 a_n \cos(nx) - n^2 b_n \sin(nx)\big)$$

On en déduit que

$$y_0''(x)+y_0'(x)+y_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big((-n^2a_n+nb_n+a_n)\cos(nx)+(-n^2-na_n+b_n)\sin(nx)\big).$$

Pour que $y_0$ soit une solution de $(E)$ il suffit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} -n^2a_n + nb_n + a_n = \dfrac{1}{n^3} \\ -n^2 - na_n + b_n = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $a_n = \dfrac{1-n^2}{n^3(n^4-n^2+1)}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^2(n^4-n^2+1)}$. On a alors $|a_n| \sim \dfrac{1}{n^5}$ et $|b_n| \sim \dfrac{1}{n^6}$ et on a donc bien $a_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ et $b_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

La fonction $y_0$ définie par $y_0(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(1-n^2)\cos(nx)}{n^3(n^4-n^2+1)} + \frac{\sin(nx)}{n^2(n^4-n^2+1)}\right)$ est donc une solutions particulière de $(E)$.

Les solutions de $(E)$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto y_0(x) + Ae^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles.

**Exercice 1.6.** *Centrale-Supélec PSI 2008, ODT page 13*

> (A l'aide du logiciel de calcul formel).
>
> Montrer à l'aide du logiciel que la fonction $f$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{x+t}-1} dt$ est une solution maximale de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.
>
> Donner la valeur de la limite de $f$ en $+\infty$.

Montrer que la fonction $g$ définie par $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
A l'aide du développement en série de Fourier de la fonction $2\pi$-périodique qui coïncide avec $t \mapsto e^t$ sur $]-\pi, \pi[$, vérifier la valeur de $g(0)$ donnée par le logiciel.

**Exercice 1.7.** *Mines-Ponts PSI 2008, RMS page 101*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue et $2\pi$-périodique. On note $c_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ les coefficients de Fourier de $f$ : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N},\ c_n(f) = \mathrm{o}(1/|n|^k)$ quand $n \to +\infty$ et quand $n \to -\infty$.

**Exercice 1.8.** *Mines-Ponts PSI 2008, RMS page 101*

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $\|f\|_\infty \leqslant \frac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}$.

Indication : on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

## Solution

Il s'agit d'une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que nous allons utiliser sous la forme suivante :

Soient $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum \alpha_n^2$ et $\sum \beta_n^2$ soient convergentes. Alors la série de terme général $\alpha_n\beta_n$ est convergente et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\beta_n\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^2\right). \tag{1}$$

Soit $g$ la fonction $2\pi$-périodique telle que $\forall t \in [0, 2\pi],\ g(t) = f\left(\frac{t}{2\pi}\right)$. La fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

Notons $a_n(g)$ et $b_n(g)$ les coefficients de Fourier de $g$ :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\,dt \text{ et } b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos(nt)\,dt.$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n(g'') = -n^2 a_n(g)$ et $b_n(g'') = -n^2 b_n(g)$.

Le théorème de convergence normale montre que la série de Fourier de $g$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g(t) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(g)\cos(nt) + b_n(g)\sin(nt)\big).$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $|a\cos(y) + b\sin(y)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

On en déduit que $\forall t \in \mathbb{R},\ |g(t)| \leqslant \dfrac{|a_0(g)|}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(g)^2 + b_n(g)^2}$

et donc que

$$\|f\|_\infty = \|g\|_\infty \leqslant \frac{|a_0(g)|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(g)^2 + b_n(g)^2}.$$

Comme de plus $g(0) = f(0) = 0$, on a $\dfrac{a_0(g)}{2} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)$ et donc

$$\frac{|a_0(g)|}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(g)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(g)^2 + b_n(g)^2}.$$

Il en résulte

$$\|f\|_\infty \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n(g)^2 + b_n(g)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sqrt{a_n(g'')^2 + b_n(g'')^2}.$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(1)$ on a

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sqrt{a_n(g'')^2 + b_n(g'')^2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(g'')^2 + b_n(g'')\right)^2\right),$$

et d'après la formule de Parseval : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(g'')^2 + b_n(g'')\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (g''(t))^2 dt.$

Il en résulte que $\|f\|_\infty^2 \leqslant \dfrac{4\pi^3}{90}\displaystyle\int_0^{2\pi} (g''(t))^2 dt.$

Or on a $g''(t) = \dfrac{1}{2\pi^2} f''\left(\dfrac{t}{2\pi}\right)$, d'où $\displaystyle\int_0^{2\pi} (g''(t))^2 dt = \frac{1}{4\pi^4}\int_0^{2\pi} \left(f''\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right)^2 dt$

et avec le changement de variable $x = \dfrac{t}{2\pi}$ on obtient

$$\int_0^{2\pi} (g''(t)^2) dt = \frac{2\pi}{4\pi^4}\int_0^1 (f''(x))^2 dx = \frac{1}{2\pi^3}\|f''\|_2^2.$$

On obtient finalement $\|f\|_\infty^2 \leqslant \dfrac{1}{45}\|f''\|_2^2$ et donc $\|f\|_\infty \leqslant \dfrac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}$.

Chapitre **2**

# Equations différentielles.

## 2.1 EQUATIONS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE.

**Exercice 2.1.** *Centrale PC 2008, RMS page 148*

> Résoudre l'équation différentielle $(E)$ $x^2y' - (2x-1)y = x^2$. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

**Solution** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -2x+1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Mais comme le coefficient de $y'$ s'annule pour $x=0$, le théorème de Cauchy affirme seulement l'existence de solutions définies sur $I_1 = ]0, +\infty[$ et sur $I_2 = ]-\infty, 0[$.

Commençons par résoudre l'équation $(E)$ sur l'un ou l'autre de ces deux intervalles. L'équation homogène associée s'écrit $y' = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) y$. La fonction $x \mapsto \ln(x^2) + \frac{1}{x}$ est une primitive particulière de la fonction $x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$. Les solutions de l'équation homogène sur $I_k$ $(k=1,2)$ sont donc de la forme :

$$\forall x \in I_k,\ y_k(x) = \lambda_k x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

où $\lambda_k$ est une constante réelle.

La fonction $x \mapsto x^2$ est une solution évidente de l'équation $(E)$. Les solutions de $(E)$ définies sur $I_k$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\forall x \in I_k,\ y_k(x) = x^2 + \lambda_k x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cherchons maintenant les solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Soit $y$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

Sa restriction $y_k$ à $I_k$ est une solution de $(E)$ sur $I_k$. Il existe donc deux constantes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que $y(x) = x^2 + \lambda_1 x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $y(x) = x^2 + \lambda_2 x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x < 0$.

On a nécessairement $\lambda_1 = 0$, car si $\lambda_1 \neq 0$, alors $\lambda_1 x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers l'infini (avec le signe de $\lambda_1$) quand $x$ tend vers $0$ par valeurs positives.

La fonction $y$ se présente sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \\ x^2 \text{ si } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

où $\lambda$ est une constante réelle.

Réciproquement soit $y$ une fonction de la forme $(1)$.

La fonction $y$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions $y_1$ à $]-\infty, 0[$ et $y_2$ à $]0, +\infty[$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et ce sont des solutions de $(E)$.

Démontrons que $y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On a évidemment $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 0$.

Pour $x < 0$ on a $y'(x) = 2x + 2\lambda x \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda \exp\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ quand $x \to 0^-$.

La fonction $y$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $y'(x) = 0$.

La relation $x^2 y' - (2x-1)y = x^2$ est donc encore vérifiée pour $x = 0$.

On en déduit que $y$ est solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 2.2.** *Mines-Ponts PSI 2008, RMS page 101*

> Soit $\Phi$ l'application qui à toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ associe la fonction $F$ définie par $F(0) = f(0)$ et, pour tout $x > 0$, par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.
>
> 1) Démontrer que $\Phi$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
> 2) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
> 3) Déterminer les éléments propres de $\Phi$.

## Solution

1) Démontrons que $\Phi$ est une application de $E$ dans $E$.

   Soit en effet $f \in E$. L'application $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle donc continue sur $\mathbb{R}_+$. L'application $F$ est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions continues.

   Démontrons sa continuité au point $x = 0$.

   Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Puisque l'application $f$ est continue au point $x = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$ si $|x| \leqslant \alpha$.

   Si $0 < x \leqslant \alpha$, on a

   $$|F(x) - f(0)| \leqslant \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(0)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - f(0)|\,dt \leqslant \varepsilon.$$

   Ceci démontre que $F(x) - f(0)$ tend vers $0$ quand $x \to 0$. La fonction $F$ est donc continue au point $x = 0$. C'est donc un élément de $E$.

Démontrons maintenant que $\Phi$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$.
Soient $f$ et $g$ deux éléments de $E$ et soit $\lambda$ un nombre réel. Posons $H = \Phi(f+\lambda g)$.
On a $H(0) = f(0) + \lambda g(0) = \Phi(f)(0) + \lambda\Phi(g)(0)$.
Pour $x > 0$ on a

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x (f(t) + \lambda g(t))\,dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x (f(t) + \lambda g(t))\,dt \\ &= \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt + \lambda\int_0^x g(t)\,dt\right) \\ &= \Phi(f)(x) + \lambda\Phi(g)(x). \end{aligned}$$

On a donc $\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$, ce qui démontre que $\Phi$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$.

2) Déterminons le noyau de l'endomorphisme $\Phi$. Soit $f \in E$ telle que $F = \Phi(f) = 0$. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en résulte que sa dérivée $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et par continuité on a aussi $f(0) = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

3) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de l'endomorphisme $\Phi$. Il existe un élément non nul $f$ de $E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x)$.
Pour tout $x > 0$ on a $f(x) = \dfrac{1}{\lambda x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. La fonction $f$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \lambda(f(x) + xf'(x))$. La fonction $f$ est donc solution de l'équation différentielle

$$xf'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda} f(x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \,. \tag{1}$$

Supposons d'abord $\lambda \neq 1$. Il existe une constante réelle $A$ non nulle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = Ae^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln(x)} = Ax^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}. \tag{2}$$

Notons que la continuité de $f$ au point $x = 0$ impose la condition $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} > 0$, c'est à dire $0 < \lambda < 1$ et que l'on a alors $f(0) = 0$.
Réciproquement supposons $0 < \lambda < 1$. Les fonctions non nulles de $(E)$ qui vérifient la relation $\Phi(f) = \lambda f$ sont des solutions non nulle de l'équation différentielle $(1)$. Leur restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est donc de la forme $(2)$. Réciproquement toute fonction $f$ de la forme $(2)$ peut être prolongée par continuité en $0$ avec $f(0) = 0$. On vérifie alors aisément que $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x)$ pour $x > 0$ et que $f(0) = \lambda f(0)$ (puisque $f(0) = 0$). On a donc bien $\Phi(f) = \lambda f$.

Reste à étudier le cas $\lambda = 1$. L'équation différentielle $(1)$ s'écrit $f' = 0$. Les solutions sont les fonctions constantes. Réciproquement si $A$ est un réel non nul, la fonction constante $f = A$ vérifie évidemment $\phi(f) = f$.

## 2.2 EQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE.

**Exercice 2.3.** *CCP PSI 2008, ODT page 166*

> Résoudre l'équation différentielle $(E)$ $xy'' - y' + 8x^3y = x^3\cos(\sqrt{2}x^2)$ (on pourra effectuer le changement de variable $t = x^2$).

**Solution** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Comme le coefficient de $y''$ s'annule pour $x = 0$ nous commençons par résoudre $(E)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

L'application $x \mapsto t = x^2$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ de $I$ sur $I$ dont le difémorphisme réciproque est $t \mapsto x = \sqrt{t}$. Soit $z$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$. Alors la fonction $y$ définie par $y(x) = z(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$ et on a $y'(x) = 2xz'(x^2)$ et $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2z''(x)$.

On a donc $xy''(x) - y'(x) + 8x^3y(x) = 4x^3z''(x^2) + 8x^3z(x^2)$. Pour que $y$ soit une solution de $(E)$, il faut et il suffit que $z$ soit solution sur $I$ de l'équation différentielle $(F)$ $4z'' + 8z = \cos(\sqrt{2}t)$.

Les solutions d l'équation homogène $4z'' + 8z = 0$ sont les fonctions de la forme $z(t) = A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t)$ où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles. La méthode de variation des constantes montre que les solutions de l'équation complète sont de la forme $z(t) = A(t)\cos(\sqrt{2}t) + B(t)\sin(\sqrt{2}t)$ où $A$ et $B$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ telles que

$$\begin{cases} A'(t)\cos(\sqrt{2}t) + B'(t)\sin(\sqrt{2}t) & = & 0 \\ \sqrt{2}(-A'(t)\sin(\sqrt{2}t) + B'(t)\cos(\sqrt{2}t)) & = & \frac{1}{4}\cos(\sqrt{2}t). \end{cases}$$

On en déduit $A'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{16}\sin(2\sqrt{2}t)$ et

$B'(t) = \frac{\sqrt{2}}{8}\cos^2(\sqrt{2}t) = \frac{\sqrt{2}}{16}(1 + \cos(2\sqrt{2}t))$. D'où

$A(t) = \frac{1}{32}\cos(2\sqrt{2t}) + a$ et $B(t) = \frac{\sqrt{2}}{16}t + \frac{1}{32}\sin(2\sqrt{2}t) + b$ où $a$ et $b$ sont deux constantes réelles.

On en déduit $z(t) = \left(a + \frac{1}{32}\right)\cos(\sqrt{2}t) + \left(b + \frac{\sqrt{2}t}{16}\right)\sin(\sqrt{2}t)$, puis

$$\forall x \in \,]0, +\infty[,\ y(x) = \left(a + \frac{1}{32}\right)\cos(\sqrt{2}x^2) + \left(b + \frac{\sqrt{2}x^2}{16}\right)\sin(\sqrt{2}x^2). \quad (1)$$

On obtient facilement la résolution de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$, en remarquant que si $y$ est solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$, alors la fonction $y_1$ définie par $y_1(x) = y(-x)$ est une solution de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$. On a en effet pour tout $x \in ]-\infty, 0[$, $y_1'(x) = -y'(-x)$, $y_1''(x) = -y''(-x)$, d'où

$$\begin{aligned} xy_1''(x) - y_1'(-x) + 8x^3y_1(x) &= xy''(-x) + y'(-x) + 8x^3y(-x) \\ &= -\big((-x)y''(-x) - y'(-x) + 8(-x)^3y(-x)\big) \\ &= -((-x)^3\cos(\sqrt{2}(-x)^2) \\ &= x^3\cos(\sqrt{2}x^2) \end{aligned}$$

Les solution de $(E)$ sur $]-\infty, 0[$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\forall x \in ]0, +\infty[,\ y(x) = \left(c + \frac{1}{32}\right)\cos(\sqrt{2}x^2) + \left(d + \frac{\sqrt{2}x^2}{16}\right)\sin(\sqrt{2}x^2). \quad (2)$$

où $c$ et $d$ sont des constantes réelles.

Cherchons maintenant les solutions définies sur $\mathbb{R}$. Si $y$ est une solution définie sur $\mathbb{R}$, sa restriction à $]0, +\infty[$ est de la forme $(1)$ avec deux constantes réelles $a$ et $b$ et sa restriction à $]-\infty, 0[$ est de la forme $(2)$ avec des constantes $c$ et $d$. En prenant les limite à droite et à gauche de $y$ en $0$ on obtient la condition $a = c$. Les limite à gauche et à droite de $y'$ en $0$ sont nulles. En prenant les limites à gauche et à droite de $y''$ en $0$ on obtient $2\sqrt{2}b = 2\sqrt{2}c$ et donc $b = d$.

Il en résulte que les solutions de $(E)$ définies sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(a + \frac{1}{32}\right)\cos(\sqrt{2}x^2) + \left(b + \frac{\sqrt{2}x^2}{16}\right)\sin(\sqrt{2}x^2).$$

où $a$ et $b$ sont deux constantes réelles.

**Exercice 2.4.** *Centrale PSI 2008, RMS page 140*

> Résoudre l'équation différentielle $(E)$ $y'' + y = |x|$.

**Solution** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. (Notons que l'application $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.)

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$y\colon x \mapsto y(x) = A\cos x + B\sin x$$

où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles.

Résolvons $(E)$ grâce à la méthode de variation des constantes. Les solutions de $(E)$ sont de la forme $x \mapsto A(x)\cos x + B(x)\sin x$ où $A$ et $B$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = |x|\,. \end{cases}$$

On en déduit que $A'(x) = -|x|\cos x$ et $B'(x) = |x|\cos x$.

Posons $A(x) = -\int_0^x |t|\sin t\,dt$ et $B(x) = \int_0^x |t|\cos t\,dt$.
Pour $x \geqslant 0$ on a :

$$A(x) = -\int_0^x t\sin t\,dt = [t\cos t]_0^x - [\sin t]_0^x = x\cos x - \sin x,$$
$$B(x) = \int_0^x t\cos t\,dt = [t\sin t]_0^x + [\cos t]_0^x = x\sin x + \cos x - 1.$$

et pour $x < 0$ :

$$A(x) = -\int_0^x |t|\sin t\,dt = \int_0^x t\sin t, dt = -x\cos x + \sin x,$$
$$B(x) = \int_0^x |t|\cos t\,dt = -\int_0^x t\cos t\,dt = -x\sin x - \cos x + 1.$$

Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto (A(x) + a)\cos x + (B(x) + b)\sin x$$

où $a$ et $b$ sont des constantes réelles.

**Exercice 2.5.** *ICNA PC 2008, ODT page 29*

> Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle :
>
> $$(E) :\ (x^2-1)y'' - 2pxy' + p(p+1)y = 0.$$
>
> 1) Montrer que les dérivées successives de $f$ sont solution d'une équation différentielle du même type.
>
> 2) En déduire que $f$ est une fonction polynomiale de degré au plus $p+1$ de $(E)$.
>
> 3) Déterminer une solution qui s'annule en $+1$ ou en $-1$ et en déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.

## Solution

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2-1)f''(x) - 2pxf'(x) + p(p+1)f(x) = 0$. En dérivant $n$ fois cette relation à l'aide de la formule de Leibniz on obtient :

$$(x^2-1)f^{(n+2)}(x) + 2nxf^{(n+1)}(x) + 2\frac{n(n-1)}{2}f^{(n)}(x)$$
$$-2pxf^{(n+1)}(x) - 2pnf^{(n)}(x) + p(p+1)f^{(n)}(x) = 0.$$

d'où en posant $f^{(n)} = g_n$ :

$$(x^2-1)g_n''(x) - 2(p-n)g_n'(x) + (n(n-1) - 2pn + p - n)g_n(x) = 0.$$

En remarquant que $n(n-1) - 2pn + p(p+1) = (p-n)(p-n+1)$ on obtient :

$$(x^2-1)g_n''(x) - 2(p-n)g_n'(x) + (p-n)(p-n+1)g_n(x). \qquad (1)$$

Ainsi $f^{(n)}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle obtenue à partir de $(E)$ en remplaçant $p$ par $p-n$.

2) En particulier pour $p = n$ on obtient $(x^2-1)f^{(p+2)}(x) = 0$. On a donc $f^{(p+2)}(x) = 0$ pour tout $x \neq \pm 1$, et puisque la fonction $f^{(p+2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on a $f^{(p+2)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui démontre que $f$ est une fonction polynomiale de degré intérieur ou égal à $p+1$.

3) On vérifie aisément que les fonctions $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (x+1)^{p+1}$ et $v(x) = (x-1)^{p+1}$ sont des solutions de $(E)$.
Pour la fonction $u$ par exemple, on a $u'(x) = (p+1)(x+1)^p$ et $u''(x) = p(p+1)(x+1)^{p-1}$ d'où

$$\begin{aligned}
&(x^2-1)u''(x) - 2pu'(x) + p(p+1)u(x) \\
&\quad = p(p+1)(x-1)(x+1)^p - 2p(p+1)x(x+1)^p + p(p+1)(x+1)^{p+1} \\
&\quad = (x+1)^p(p(p+1)(x-1) - 2p(p+1)x + p(p+1)(x+1)) \\
&\quad = p(p+1)(x+1)^p((x-1) - 2x + (x+1)) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Utilisons les fonctions $u$ et $v$ pour achever la résolution de $(E)$. Nous allons pour cela appliquer le théorème de Cauchy : mais attention, il ne s'applique que sur des intervalles où la fonction coefficient de $y''$ ne s'annule pas. Cette condition nous oblige à étudier la résolution séparément sur chacun des intervalles $I_1 = ]-\infty, -1[$, $I_2 = ]-1, 1[$ et $I_3 = ]1, +\infty[$. Désignons par $u_k$ ($k = 1, 2, 3$) la restriction de la fonction $u$ à l'intervalle $I_k$, et définissons de même les fonctions $v_k$.
Les fonctions $u_k$ et $v_k$ sont des solutions de $(E)$ sur $I_k$ et elles sont linéairement indépendantes puisque leur Wronskien

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} u_k(x) & v_k(x) \\ u_k'(x) & v_k'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x+1)^{p+1} & (x-1)^{p+1} \\ (p+1)(x+1)^p & (p+1)(x-1)^p \end{vmatrix} = 2(p+1)(x^2-1)^p$$

est non nul.
Les fonctions $u_k$ et $v_k$ forment donc un système fondamental des solutions de $(E)$ sur $I_k$. Les solutions de $(E)$ sur $I_k$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\forall x \in I_k,\ f_k(x) = a_k(x-1)^{p+1} + b_k(x-1)^{p+1}$$

où $a_k$ et $b_k$ sont des constantes réelles.
Dans le cas ou $p \geqslant 2$ nous allons étudier les solutions définies sur $]-\infty, 1[$ et les solutions définies sur $]-1, +\infty[$, puis les solutions définies sur $\mathbb{R}$.
Etudions les solutions de $(E)$ définies sur $]-\infty, 1[$.

Cela revient à étudier le raccordement éventuelle d'une solution $f_1$ définie sur $I_1$ avec une solution $f_2$ définie sur sur $I_2$.
Il existe alors quatre constantes réelles $a_1, a_2, b_1$ et $b_2$ quatre constantes réelles telles que $f_1 = a_1u_1 + b_1v_1$ définie sur $I_1$ et $f_2 = a_2u_2 + b_2v_2$.
Déterminons les limites de $f_1$ et $f_2$ et de leurs dérivées d'ordre $1$ et $2$ au point $x = -1$ :

$$\lim_{x\to -1^-} f_1(x) = (-2)^{p+1}b_1,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f_2(x) = (-2)^{p+1}b_2,$$
$$\lim_{x\to -1^-} f_1'(x) = (p-1)(-2)^{p}b_1,$$
$$\lim_{x\to -1^-} f_2'(x) = (p-1)(-2)^{p}b_2,$$
$$\lim_{x\to -1^-} f_2''(x) = p(p-1)(-2)^{p-1}b_1,$$
$$\lim_{x\to -1^-} f_2''(x) = p(p-1)(-2)^{p-1}b_2.$$

Il en résulte que $f_1$ et $f_2$ sont les restrictions d'une solution définie sur $]-\infty, 1[$ si et seulement si $b_1 = b_2$.
Les solutions définies sur $]-\infty, 1[$ de $(E)$ sont donc les fonctions $f$ telles que $f(x) = a_1(x+1)^{p+1}+b_2(x-1)^{p+1}$ si $x < -1$, $f(x) = a_2(x+1)^{p+1}+b_2(x-1)^{p+1}$ si $-1 < x < 1$ et $f(-1) = (-2)^{p+1}b_2$ où $a_1, a_2$ et $b_2$ sont trois constantes réelles arbitraires.
Une étude analogue montre que les solutions de $(E)$ définies sur $]-1, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $f(x) = a_2(x+1)^{p+1} + b_2(x-1)^{p+1}$ si $-1 < x < 1$, $f(x) = a_2(x+1)^{p+1} + b_3(x-1)^{p+1}$ si $x > 1$ et $f(1) = 2^{p+1}a_2$ si $x = 1$ où $a_2$, $b_2$, $b_3$ sont des constantes réelles arbitraires.
Il en résulte que les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f$ telles que $f(x) = a_1(x+1)^{p+1}+b_2(x-1)^{p+1}$ si $x < -1$, $f(x) = a_2(x+1)^{p+1}+b_2(x-1)^{p+1}$ si $-1 < x < 1$, $f(x) = a_2(x+1)^{p+1}+b_3(x-1)^{p+1}$ si $x > 1$, $f(-1) = (-2)^{p+1}b_1$ et $f(1) = 2^{p+1}a_2$.

**Exercice 2.6.** *Centrale PC 2008, RMS page 148*

(A l'aide de Maple).

On considère l'équation différentielle $(E)\ x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.

1) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de $0$.
2) Résoudre $(E)$.
3) Que donne `Maple` ? Comparer.

## Solution

1) Soit $\sum a_n x^x$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme $S$ est une solution de $(E)$. On a alors, pour tout $x \in I$ :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\ y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

d'où :

$$2y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n,\ 4xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4n a_n x^n,\ x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

et

$$x^2 y''(x) + 4xy'(x + 2y(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 4n + 2) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) a_n x^n.$$

On a aussi pour tout $x \in ]-1, 1]$, $\ln(1 + x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n$.

Posons $r = \inf(1, R)$. Le théorème d'unicité du développement en série entière montre que pour que $S$ soit solution de $(E)$ dans $]-r, r[$, il faut et il suffit que $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2(n+2)}$.

On a alors $\left|\dfrac{a^{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^2(n+2)}{(n+2)^2(n+3)} \to 1$ quand $n \to +\infty$. On en déduit grâce à la règle de d'Alembert que $R = 1$. La somme $S$ est donc solution de $(E)$ dans l'intervalle ouvert $]-1, 1]$.

2) Résolvons l'équation différentielle $(E)$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Commençons par la résolution de l'équation homogène $(H)$ $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$. Comme le coefficient de $y''$ s'annule pour $x = 0$ nous cherchons les solutions définies sur $I_1 = ]0, +\infty[$ et les solutions définies sur $I_2 = ]-\infty, 0[$.

L'application $t \mapsto x = e^t$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ sur $I_1$ dont le difféomorphisme réciproque est $x \mapsto t = \ln x$.

Soit $y$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I_1$. L'application $z$ définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x)$ et $z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t) = x^2 y''(x) + xy'(x)$.

On a donc $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = z''(t) + 3z'(t) + 2z(t)$.

Pour que $y$ soit solution de $(H)$ sur $I_1$, il faut et il suffit que $z$ soit solution de l'équation différentielle $(H_1)$ $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0$.

Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique $z^2 + 3r + 2 = 0$ a deux racines réelles : $-1$ et $-2$. Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ forment un système fondamental des solutions de $(H_1)$ définies sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que les fonction $u_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $v_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ forment un système fondamental de solutions de $(H)$ sur $I_1$.
On vérifient aisément que les fonctions $u_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $v_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ forment un système fondamental de solutions de $(H)$ sur $I_2$.
Passons à la résolution de l'équation complète sur $I_1$. La méthode de variation des constantes montre que les solutions de $(E)$ sur $I_1$ sont de la forme $x \mapsto \dfrac{A(x)}{x} + \dfrac{B(x)}{x}$ où $A$ et $B$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I_1$ telles que, pour tout $x \in I_1$ :

$$\begin{cases} \dfrac{A'(x)}{x} + \dfrac{B'(x)}{x^2} = 0 \\ -\dfrac{A'(x)}{x^2} - 2\dfrac{B'(x)}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}\ \ln(1+x) \end{cases}$$

On a donc aussi $\begin{cases} xA' + B' = 0 \\ xA' + 2B' = -x\ln(1+x). \end{cases}$
On en déduit $A'(x) = \ln(1+x)$ et $B'(x) = -x\ln(1+x)$ puis (à l'aide d'intégrations par parties où à l'aide de `Maple` $A(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + a$ et $B(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^2\ln(1+x) + (1+x)\ln(1+x) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + b$ où $a$ et $b$ sont deux constantes réelles.
Les solutions de $(E)$ sur $I_1$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) = &\Big((1+x)\ln(1+x) - x + a\Big)\frac{1}{x} \\ &+ \left(-\frac{1}{2}(1+x)^2\ln(1+x) + (1+x)\ln(1+x) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + b\right)\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

où $a$ et $b$ sont deux constantes réelles.
Les calculs précédents permettent également de déterminer les solutions de $(E)$ sur $]-1,0[$ qui présentent donc la même forme.

3) Passons à la résolution à l'aide de `Maple`. L'instruction :

```
dsolve(x^2*diff(y(x),x,x)+4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=ln(1+x),
y(x));
```

retourne :

$$\begin{aligned} y(x) = &\frac{\_C1}{x} + \frac{\_C2}{x^2} \\ &+1/4\,\frac{-6\,x - 3\,x^2 + 2\,\ln(1+x) + 4\,x\ln(1+x) + 2\,\ln(1+x)\,x^2 - 1}{x^2} \end{aligned}$$

On obtient bien le même résultat que l'on peut écrire sous la forme :

$y(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x^2} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{2+4x+2x^2}{x^2}\ln(1+x)$, où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes réelles.

**Exercice 2.7.** *Centrale PC 2008, RMS page 148*

(A l'aide de Maple).
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(E)$ l'équation différentielle : $y'' + (x^2+\lambda^2)y = 0$. On cherche une solution $f$ de $(E)$ qui soit la somme d'une série entière : $f\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

1) Donner une relation entre les coefficients $a_n$.
2) Ecrire en programme dans le langage `Maple` pour calculer les coefficients $a_n$.

## Solution

1) Désignons par $R$ le rayon de convergence de la série entière et supposons $R > 0$.

On a alors pour tout $x \in I = ]-R, R[$, $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $y''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} y''(x) + (x^2+\lambda^2)y(x) &= (\lambda^2 a_0 + 2a_2) + (\lambda^2 a_1 + 6a_3)x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n-2} + \lambda^2 a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2})x^n. \end{aligned}$$

Pour que $f$ soit solution de $(E)$ sur $I$, il faut et il suffit que : $\lambda^2 a_0 + 2a_2 = 0$, $\lambda^2 a_1 + 6a_3 = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n-2} + \lambda^2 a_n + (n+1)(n+2)a_{n+2}$.
On déduit de la seconde relation que $a_3 = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La dernière relation s'écrit

$$a_{2p+3} = -\frac{1}{(2p+2)(2p+3)}\big(\lambda^2 a_{2p+1} + a_{2p-1}\big). \tag{1}$$

Démontrons alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété : $a_{2p+1} = 0$. C'est vrai pour $p = 0$ et pour $p = 1$. Soit $p$ un entier supérieur ou égal à 2 et supposons $a_{2k+1} = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$. La relation $(1)$ montre que $a_{2p+3} = 0$. La propriété est donc vérifiée à l'ordre $p+1$ et elle est donc vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On a donc $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}$, les coefficients $a_{2p}$ vérifiant $a_0 = 1$, $a_2 = -\lambda^2$ et pour tout $p \geqslant 2$,

$$a_{2p+2} = -\frac{1}{(2p+1)(2p+2)}\big(\lambda^2 a_{2p} + a_{2p-2}\big).$$

Dans la suite nous poserons $a_{2p} = b_p$. La relation s'écrit aussi :

$$\forall p \geqslant 2,\ b_p = -\frac{1}{(2p-1)(2p)}\big(\lambda^2 b_{p-1} + b_{p-2}\big). \tag{2}$$

2) Voici une procédure écrite dans le langage `Maple` qui permet de calculer les coefficients $b_p$ :

```
b:=proc(p) option remember;
 if p=0 then 1
 elif p=1 then -\lambda^2
 else -(\lambda^2*b(p-1)+b(p-2))/((2*p-1)*(2*p)) end if
 end proc;
```

Par exemple l'instruction `simplify(b(2))` retourne $\frac{\lambda^4}{12} - \frac{1}{12}$ et l'instruction `simplify(b(3))` retourne $-\frac{\lambda^6}{360} + \frac{13\lambda^2}{360}$.

**Exercice 2.8.** *Mines-Ponts PSI 2008, ODT page 19*

> Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$, $p$ une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$.
> Soit $y$ une solution de l'équation différentielle $y'' + p(x)y' - ky = 0$ telle que $y(a) = y(b) = 0$. Montrer que $y$ est la fonction nulle.

**Solution** Nous allons faire une démonstration par l'absurde en supposant que $y$ n'est pas la fonction nulle. Il existe donc un $x_0 \in [a, b]$ tel que $y(x_0) \neq 0$ et quitte à remplacer $y$ par $-y$ on peut supposer $y(x_0) > 0$.

La fonction $y$ étant continue sur le segment $[a, b]$, elle y présente un maximum $M$. Soit $c$ un point de $[a, b]$ en lequel ce maximum est atteint. Comme $M \geqslant y(x_0) > 0$, $c$ appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$ et on a donc $y'(c) = 0$. On en déduit que $y''(c) = ky(c) = kM > 0$. Par continuité de $y''$ il existe un intervalle ouvert $J = ]c - \alpha, c + \alpha[$ (avec $\alpha > 0$) inclus dans $[a, b]$ tel que $y''(x) > 0$ pour tout $x \in J$. La restriction de $y$ à l'intervalle $J$ est donc convexe. On en déduit que $y(x) \geqslant y(c)$ pour tout $x \in J$ et donc $y$ est la fonction constante égale à $M$ sur $J$. Mais alors $y'$ est la fonction nulle sur $J$. Il en résulte $y''(x) = 0$ pour tout $x \in J$, ce qui est absurde.

**Exercice 2.9.** *Mines-Ponts PC 2008, RMS page 109*

> Soient $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $\omega$ un nombre réel strictement positif et $(E)$ l'équation différentielle $y'' + \omega y = f$. Existe-t-il des solutions $2\pi$-périodiques de $(E)$ ?

**Solution** Supposons que $(E)$ possède une solution $2\pi$-périodique $g$. Alors la fonction $g''$ est elle aussi $2\pi$-périodique et $f = g'' + \omega g$ est $2\pi$-périodique.

Supposons maintenant que la fonction $f$ est $2\pi$-périodique. Comme de plus $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de $f$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx},$$

avec $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

On sait de plus que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{|n|^k}\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Cherchons à déterminer $g$ par son développement en série de Fourier. Comme $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ on a $c_n(g'') = -n^2 c_n(g)$. On est ainsi conduit à penser que $c_n(g)(\omega - n^2) = c_n(f)$.

Examinons d'abord le cas où $\omega - p^2 \neq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ posons $d_n = \dfrac{1}{\omega - n^2} c_n(f)$ et soit $\sum u_n$ la série de fonctions définie par $u_0(x) = d_0$, et, pour tout $n \geqslant 1,\ u_n(x) = d_n e^{inx} + d_{-n}e^{-inx}$. Chaque fonction $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on a $\|u_n\|_\infty \leqslant |d_n| + |d_{-n}| = \dfrac{|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|}{|n^2 - \omega|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N},\ \|u_n\|_\infty = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{k+2}}\right)$ quand $n$ tend vers $+\infty$. En prenant par exemple $k = 0$, on voit que la série de fonction $\sum u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Désignons par $g$ sa somme. Comme chaque fonction $u_n$ est $2\pi$-périodique, $g$ est $2\pi$ périodique sur $\mathbb{R}$.

On a de plus, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n'(x) = i\,n\,(d_n e^{inx} - d_{-n}e^{-inx}) \text{ et } u''(x) = -n^2\,(d_n e^{inx} + d_{-n}e^{-inx}).$$

On en déduit que pour tout $k \geqslant 2$ $\|u_n'\|_\infty = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$ et $\|u_n''\|_\infty = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$.

En prenant $k = 2$ on voit que les séries de fonctions $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^2}{\omega - n^2}(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}).$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g''(x) + \omega g &= \frac{\omega c_0(f)}{\omega} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega - n^2}{\omega - n^2}(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} \\ &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n(f)e^{inx} + c_n(f)e^{-inx} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

La fonction $g$ est donc une solution $2\pi$-périodique de $(E)$.

Examinons maintenant le cas où il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = p^2$.

Si $g$ est une solution $2\pi$-périodique de $(E)$, on a $c_n(f) = -n^2 c_n(g) + \omega c_n(g) = (\omega - n^2) c_n(g)$. On doit donc avoir $c_p(f) = c_{-p}(f) = 0$.

Réciproquement soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, $2\pi$-périodique, et telle que $c_p(f) = c_{-p}(f) = 0$.

On démontre avec les mêmes calculs que dans le cas précédent que la série de fonctions $\sum u_n$ avec $u_n = 0$ lorsque $n = p$ ou $n = -p$ et $u_n(x) = \dfrac{1}{p^2 - n^2}(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$ lorsque $p \neq 0$ et $n \neq \pm p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est une solution $2\pi$-périodique de $(E)$.

**Exercice 2.10.** *Mines-Ponts PC 2008, RMS page 109*

> Résoudre l'équation différentielle $(E)$ $R^2 + 2R'^2 - RR'' = 0$, avec $R(0) = a > 0$ et $R'(0) \neq 0$.

**Solution** Nous allons chercher les solutions $R\colon \theta \mapsto R(\theta)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Nous supposerons en outre que $R$ ne s'annule pas sur $I$.

Soit $R$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$ qui ne s'annule pas sur $I$ et soit $u = \dfrac{R'}{R}$. La fonction $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $u' = \dfrac{R''R - R'^2}{R^2} = \dfrac{R''R - 2R'^2}{R^2} + \dfrac{R'^2}{R^2} = 1 + u^2$.

Pour que $R$ soit solution de $(E)$, il faut et il suffit que $u$ vérifie :

$$\forall \theta \in I,\ \frac{u'(\theta)}{1 + u^2(\theta)} = 1.$$

Par primitivation on obtient $\forall \theta \in I,\ \arctan(u(\theta)) = \theta - \theta_0$ où $\theta_0$ est une constante réelle. On en déduit que $u(\theta) = \tan(\theta - \theta_0)$. La solution $u$ est maximale lorsque $I = ]-\pi/2 + \theta_0, \pi/2 + \theta_0[$.

Déterminons les fonctions $R$ correspondantes. Elles sont solutions de l'équation différentielle $R' = R\tan(\theta - \theta_0)$. La fonction $\theta \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\cos(\theta - \theta_0)}\right)$ est une primitive de $\theta \mapsto \tan(\theta - \theta_0)$ sur $I$. Les solutions de l'équation $(E)$ sont donc les fonctions de la forme $\theta \mapsto \dfrac{A}{\cos\theta - \theta_0}$.

Les conditions initiales $R(0) = a$ et $R'(0) > 0$ supposent que $0 \in I$, donc que $\theta_0 \in ]-\pi/2, \pi/2[$. On a alors $R(0) = \dfrac{A}{\cos(\theta_0)} = a$, d'où $A = a\cos(\theta_0)$ et $R(\theta) = \dfrac{a\cos(\theta_0)}{\cos(\theta - \theta_0)}$.

Complétons l'exercice en précisant quelle est la courbe d'équation polaire $R = R(\theta)$. On a $R\cos(\theta - \theta_0) = a\cos(\theta_0)$. En posant $x = R\cos(\theta)$ et $y = R\sin(\theta)$, on obtient $x\cos(\theta_0) + y\sin(\theta_0) = a\cos(\theta_0)$. Il s'agit de la droite passant par le point $(a, 0)$ et dirigée par le vecteur $(-\sin(\theta_0), \cos(\theta_0))$.

**Exercice 2.11.** *Mines-Ponts 2008, RMS page 101*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $p \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la seule solution de l'équation différentielle $y'' + p(x)y' - ky = 0$ satisfaisant la condition $f(a) = f(b) = 0$ est la fonction nulle.

**Exercice 2.12.** *Ecole Polytechnique-ESPCI PC 2008, RMS page 76*

Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$.

## 2.3 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELLES.

**Exercice 2.13.** *CCP PSI 2008, RMS page 158*

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -x - x + 2z \end{cases}$

**Solution** Le système différentiel s' écrit matriciellement $X' = AX$, avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. La matrice $A$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Calculons son polynôme caractéristique $\chi_A(x)$ :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -x & -x & -x \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \qquad \text{(En ajoutant les lignes 2 et 3 à la première.)} \\
&= -x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & -1 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= -x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \qquad \text{(En ajoutant la ligne 1 aux deux suivantes.)} \\
&= -x(3-x)^2 .
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de $A$ sont $0$ et $3$. Comme $0$ est une valeur propre simple, le sous-espace propre associé est une droite vectorielle. Le vecteur $u = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ en constitue une base. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est le plan orthogonal, c'est à dire le plan $P$ d'équation $x+y+z=0$. Les vecteurs $v=\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix}$ et $u=\begin{vmatrix}1\\-2\\1\end{vmatrix}$ constituent une base de $P$.

On en déduit que les solutions du système sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme : $X\colon t\mapsto X(t)=au+be^{3t}v+ce^{3t}w$, où $a$, $b$ et $c$ sont trois constantes réelles.

## 2.4 EQUATIONS NON LINÉAIRES.

**Exercice 2.14.** *ENSIIE PSI 2008, RMS page 158*

Soit $(E)$ l'équation différentielle $y'=x^2+y^2$.

1) Montrer que si $y$ est solution de $(E)$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, alors $z\colon x\mapsto -y(-x)$ est solution de $(E)$ sur $I'=\{x\in\mathbb{R}\,;\,-x\in I\}$.

2) Montrer qu'il existe une unique solution de $(E)$ maximale et impaire, que l'on notera $y_0$.

3) Montrer que $y_0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $y_0^{(k)}(0)$ pour $1\leqslant k\leqslant 4$.

4) Soit $g$ une solution impaire développable en série entière, si elle existe, de $(E)$ : $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

Montrer que $a_{2n}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et que $a^{2n+1}=\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k+l+m=n}a^{2k+1}a_{2l+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

5) Calculer $a_1$ et $a_3$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_{2n+1}|\leqslant 1$. En déduire que $g=y_0$

### Solution

1) Si $y$ est une solution de $(E)$ définie sur $I$, soit $z$ la fonction définie sur $I'$ par $z(x)=-y(-x)$. La fonction $z$ est dérivable sur $I'$ et on a $z'(x)=y'(-x)$. On a donc pour tout $x\in I'$, $z'(x)=y'(-x)=(-x)^2+(-y(-x))^2=x^2+z(x)^2$, ce qui démontre que $z$ est une solution de $E$. Remarquons d'ailleurs que si réciproquement $z$ est une solution de $(E)$, alors $y$ est une solution de $(E)$ et que $z$ est maximale si et seulement $y$ est maximale.

2) Soit $y$ l'unique solution maximale de $(E)$ qui vérifie la condition initiale $y(0)=0$. Son intervalle de définition est un intervalle ouvert $I$ qui contient 0. La fonction $z$ définie dans la question précédente est aussi une solution maximale de $(E)$ et elle vérifie la même condition initiale. On a donc $I'=I$ et $z=y$, ce qui montre que $y$ est une fonction impaire.

La relation $y_0' = x^2 + y_0^2$ montre que pour tout entier $n$, $y$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ dés que $y$ est de classe $\mathcal{C}^n$. Comme une solution de $(E)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, il en résulte, par récurrence sur $n$ qu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3) Par dérivations on obtient $y'' = 2x + 2yy'$, $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$ et $y^{(4)} = 2y'y'' + 2y'y'' + 2yy'''$.
On en déduit $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$ et $y^{(4)}(0) = 0$.

4) Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière. On a

$$\forall x \in \left]-R, R\right[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Si $g$ est impaire, on a $g(x) = -g(-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n$ et l'unicité du développement en série entière montre que $a_n = (-1)^{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $x \mapsto x^2 + g^2(x)$ est à son tour développable en série entière (par produit de Cauchy) :

$$\forall x \in \left]-R, R\right[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x_n.$$

On a $b_0 = a_0^2$, $b_1 = 2a_0a_1$, $b_2 = 1+2a_0a_2+2a_1^2$ et pour $n > 2$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

Comme $g$ est une solution de $(E)$, on a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$, d'où en utilisant à nouveau l'unicité de développement en série entière,

$$\forall n > 2,\ (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0} a_k a_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i a_j.$$

D'où pour $n > 1$, $(2n+1)a_{2n+1} = \sum_{i+j=2n} a_i a_j$. Comme $a_i = 0$ si $i$ est paire, on peut se limiter aux indices $i$ de la forme $2k+1$ et aux indice $j$ de la forme $2l+1$. On a donc

$$\forall n > 1,\ (2n+1)a_{2n+1} = \sum_{2k+1+2l+1=2n} a_{2k+1}a_{2l+1} = \sum_{k+l+1=n} a_{2k+1}a_{2l+1}.$$

0n a $a_1 = g'(0) = g(0)^2 = 0$ et $3a_3 = 1$, donc $a_3 = \frac{1}{3}$. Démontrons alors, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leqslant a_{2n+1} \leqslant 1$ pour tout $n$. C'est vrai pour

$n = 0$ et $n = 1$ et si on suppose la propriété vérifiée jusqu'à, l'ordre $n - 1$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{2n+1} \displaystyle\sum_{k+l+1=2n} a_{2k+1}a_{2l+1} \leqslant \dfrac{n}{2n+1} \leqslant 1$.

Il en résulte enfin que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1.

La fonction $g$ est alors une solution de $(E)$ dans l'intervalle $]-R, R[$ qui vérifie la condition initiale $g(0) = 0$. On a donc $g(x) = y_0(x)$ pour tout $x \in ]-R, R[$.

**Exercice 2.15.** *Ecole Polytechnique-ESPCI PC 2008, RMS page 76*

> Soit $f$ une solution maximale de l'équation différentielle $y' = y^2 + x^2$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $I$ est borné.

### Solution

On sait que l'intervalle de définition d'une solution maximale est ouvert. Montrons que l'intervalle $I$ est majoré.

Si $I \subset \mathbb{R}_+$, il est majoré par 0. Si $I$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$, il contient un élément $a > 0$. Pour tout $t \in I \cap [a, +\infty[$ on a $f'(t) \geqslant a^2 + f^2(t)$.

On a donc $\dfrac{f'(t)}{a^2 + f^2(t)} \geqslant 1$, d'où en intégrant sur le segment $[a, x]$ :

$$\forall x \in I \cap [a, +\infty[,\ \frac{1}{a}\left[\arctan \frac{f(t)}{a}\right]_a^x \geqslant x - a.$$

On a donc : $x - a \leqslant \frac{1}{a} \arctan \frac{f(x)}{a} - \frac{1}{a} \arctan \frac{f(a)}{a}$ et donc $x \leqslant a + \frac{\pi}{a}$, ce qui démontre que $I$ est borné.

Montrons maintenant que $I$ est minoré. Soit $g$ la fonction définie sur $I' = \{x \in \mathbb{R}\,;\ -x \in I\}$ par $g(-x) = -f(-x)$. Pour tout $x \in I'$ on a $g'(x) = f'(-x) = (-x)^2 + f^2(-x) = x^2 + g^2(x)$. C'est donc une solution de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2$. Il résulte du résultat précédent que $I'$ est majoré et donc que $I$ est minoré.

**Exercice 2.16.** *Ecole Polytechnique-ESPCI PC 2008, RMS page 76*

> On considère l'équation différentielle $(E)$ $y'^2 = 4y$.
>
> 1) Soient $f$ une solution de $(E)$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et soit $(a, b) \in I^2$ tels que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f$ est nulle sur $[a, b]$.
>
> 2) Déterminer les solutions de $(E)$ qui ne s'annulent pas sur $I$.
>
> 3) Trouver des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne sont pas de l'un des deux types précédents.

### Solution

1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ et $f(a) = f(b) = 0$. Soit $K = \{x \in [a, b]\,;\ f(x) = 0\}$. $K$ contient $a$ et $b$ et comme $f$ est continue $K$ est un sous-ensemble fermé de $[a, b]$. Nous allons démontrer par l'absurde que $K = [a, b]$.

Supposons qu'il existe un élément $c$ de $[a, b]$ n'appartenant pas à $K$ et posons $K_1 = K \cap [a, c]$. C'est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$. Elle admet donc un plus grand élément $u$ et on a $u < c$. De même $K_2 = K \cap [c, b]$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$. Elle contient donc un plus petit élément $v$ avec $c < v$. On a $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe $w$ tel que $u < w < v$ et $f'(w) = 0$. On en déduit $f(w) = 0$, ce qui est absurde puisque $w$ n'appartient ni à $K_1$, ni à $K_2$.
Ceci démontre que $f$ es nulle sur $[a, b]$.

2) Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une solution qui ne s'annule pas sur $I$. On a alors $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$, et la fonction $f'$ ne s'annule pas sur $I$. Elle a donc un signe constant sur $I$. La relation $f'^2 = 4f$ est équivalente à $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}} = \epsilon$ où $\varepsilon$ est une constante égale à $1$ ou $-1$. On en déduit que $\forall x \in I,\ \sqrt{f(x)}\varepsilon(x - x_0)$ où $x_0$ est une constante réelle, puis $f(x) = (x - x_0)^2$. Pour que $f$ ne s'annule pas sur $I$, il faut et il suffit que $x_0 \notin I$. Pour chaque $x_0$ on obtient deux solutions maximales définies par $f(x) = (x - x_0)^2$ : l'un est définie sur $], x_0[$ et l'autre sur $]x_0, +\infty[$.

3) Soient $x_0$ et $x_1$ deux réels tels que $x_0 < x1$ et soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & \text{si } x < x_0, \\ 0 & \text{si } x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ ((x - x_1)^2 & \text{si } x > x_1. \end{cases}$$

La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur les trois intervalles ouverts $]-\infty, x_0[$, $]x_0, x_1[$ et $]x_1, +\infty[$, et $f'$ a une limite finie (0) en $x_0$ et $x_1$. Le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ montre que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que c'est une solution de l'équation différentielle $(E)$ sur $\mathbb{R}$.

## 2.5 CALCUL DIFFÉRENTIEL

**Exercice 2.17.** *CCP PSI 2007, ODT page 23*

> Montrer que le domaine de définition $D$ de la fonction $f$ définie par $f(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ est la réunion de trois ouverts simples.
>
> Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$ et calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

### Solution

La fonction $f$ est définie sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 1\}$. Cet ensemble est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $(x,y) \mapsto xy$.

On peut écrire $D$ comme la réunion de trois ouverts simples :

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1$ et $x > 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy < 1\}$ et $D_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1$ et $x < 0\}$ (cf. fig. 0.1).

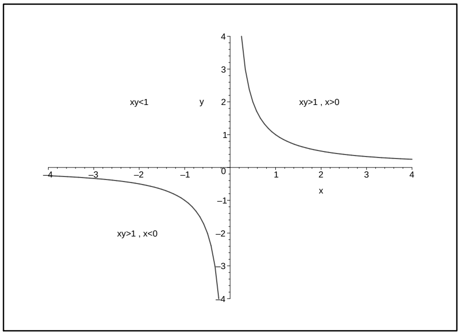


**FIG. 0.1.**

La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{1-xy}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D$ car c'est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $(x,y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $f$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ puisque c'est la somme de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Calculons la dérivée partielle par rapport à $x$ au point $(x,y) \in D$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1-xy)+y(x+y)}{(1-xy)^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{(x+y)^2}{1-xy)^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque $(1-xy)^2+(x+y)^2 = (1+x^2)(1+y^2)$.

On voit de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Un théorème du cours nous permet d'affirmer que $f$ est constante sur tout ouvert convexe contenu dans $D$. En particulier $f$ est constante sur $D_1$ et sur $D_3$.

Pour déterminer la valeur constante de $f$ sur $D_1$ calculons $f(\sqrt{3},\sqrt{3})$.

On a $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. Comme $\dfrac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$, on a $f(\sqrt{3},\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3} = \pi$.

On a donc $f(x,y) = \pi$ pour tout $(x,y) \in D_1$.

En calculant de la même façon la valeur de $f$ en $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$, on voit que $f(x,y) = -\pi$ pour tout $(x,y) \in D_3$.

L'ouvert $D_2$ n'étant pas convexe, le théorème du cours ne nous permet pas d'affirmer que $f$ est constante sur $D_2$. Nous allons en faire une démonstration directe. Soit $(x,y) \in D^2$.

Supposons d'abord $x = 0$. On alors $f(0,y) = \arctan(y) - \arctan(y) = 0$.

Si $x > 0$ alors, pour tout $t \in ]-\infty, 1/x[$, le point de coordonnées $(x,y)$ appartient à $D_2$. L'application partielle $g\colon y \mapsto f(x,y)$ est définie et dérivable sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 1/x]$ et on a $g'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. L'application $g$ est donc constante. On a donc $g(y) = g(0) = 0$ et donc $f(x,y) = 0$.

Si $x < 0$ alors, pour tout $t \in ]1/x, +\infty[$, le point de coordonnées $(x,y)$ appartient à $D_2$. L'application partielle $h\colon y \mapsto f(x,y)$ est définie et dérivable sur l'intervalle $[1/x, +\infty[$ et vérifie $h'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. L'application $h$ est donc constante sur $[1/x, +\infty[$ et on a donc $h(y) = h(0) = 0$. On a donc à nouveau $f(x,y) = 0$.

On a donc $f(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in D_2$.

**Exercice 2.18.** *CCP PSI 2007, Odt page 25*

> Soit $g$ une fonction de lasse $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ V(x,y) = ((x^2+y^2-1)g(x), 2yg(x))$.
>
> Donner une condition nécessaire sur $g$ pour qu'il existe une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tel que $V = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$.
>
> Cette condition est-elle suffisante ?

**Solution**

Soient $P$ et $Q$ les composantes de $V$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $P(x,y)=(x^2+y^2-1)g(x)$ et $Q(x,y)=2yg(x)$. Si $V$ dérive d'un potentiel $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a $P=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $Q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Le théorème de Schwarz montre que l'on doit avoir $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{Q}{\partial x}$, c'est à dire $2yg(x)=2yg'(x)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Une condition nécessaire pour qu'il existe $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $V=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$ est donc : $g'=g$.

Réciproquement si $g'=g$, il existe une constante $\lambda\in\mathbb{R}$ telle que $g(x)=\lambda e^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Les dérivées partielles de $f$ vérifient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lambda(x^2+y^2-1)e^x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2\lambda y e^x\,.$$

La deuxième relation donne $f(x,y)=\lambda y^2e^x+C(x)$ où $C$ est une fonction de la variable $x$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour que la première relation soit satisfaite il faut et il suffit que l'on ait $\lambda y^2e^x+C'(x)=\lambda(x^2+y^2-1)e^x$, c'est à dire $C'(x)=\lambda(x^2-1)e^x$. On en déduit $C(x)=\lambda(x^2-2x+1)e^x+\mu$ où $\mu$ est une constante réelle.

On a alors $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\lambda(y^2+x^2-2x+1)e^x+\mu$ et on vérifie aisément que $P=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $Q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

**Exercice 2.19.** *Mines-Ponts PC 2008, RMS page 102*

> Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0)=0$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Solution**

La fonction $f$ n'est pas continue au point $(0,0)$. On a en effet $f(x,x)=\frac{1}{2}$ et $f(-x,x)=-\frac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x,x)\neq\lim\limits_{x\to 0}f(-x,x)$. Elle n'est donc pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2.20.** *ENSEA PC 2008, Odt page 29*

> On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ par $f(x,y)=\dfrac{|y|}{x}e^{\frac{-|y|}{x^2}}$.
>
> 1) Montrer que $f$ est la restriction d'une fonction $g$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
>
> 2) Etudier l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$.

**Solution**

1) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=f(x,y)$ si $x\neq 0$ et $g(x,y)=0$ si $x=0$. La fonction $f$ est la restriction de $g$ à $U$ et elle est évidemment continue sur $U$.

   Démontrons la continuité de $g$ au point $(0,y_0)$, avec $y_0\in\mathbb{R}$. Pour $x\neq 0$ on peut écrire $g(x,y)=xu(t)$, avec $t=\dfrac{|y|}{x^2}$ et $u(t)=te^{-t}$.

La fonction $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $u'(t) = (1-t)e^{-}t$. On peut en tracer le tableau des variations sur $\mathbb{R}_+$ :

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $u'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $u(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

On a donc $0 \leqslant u(t) \leqslant \frac{1}{e}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et il en résulte que $|g(x,y)| \leqslant |x|\,\frac{1}{e}$ pour tout $(x,y) \in U$. Cette dernière inégalité est en réalité vérifiée pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ puisque $g(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin U$.

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} g(x,y) = 0$ et donc que $g$ est continue au point $(0,y_0)$.

2) La fonction $g$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ ; la dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est donc définie et continue sur $U$. On calcule aisément :

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{|y|}{x^2}e^{-\frac{|y|}{x^2}} + \frac{2y^2}{x^4}e^{-\frac{|y|}{x^2}}.$$

En particulier lorsque $(x,y) = (h,h^2)$ où $h$ est un réel positif, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(h,h^2) = \dfrac{1}{e}$.

Etudions l' existence de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ au point $(0,y)$ où $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $g(0,y) = 0$. L'application partielle $y \mapsto g(0,y)$ est donc dérivable en chaque point et sa dérivée $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ est nulle.

Comme $\dfrac{\partial g}{\partial x}(h,h^2) = \dfrac{1}{e}$ ne tend pas vers $0$ quand $h \to 0$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ n'est pas continue au point $(0,0)$.

Etudions maintenant la limite de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en un point $(0,y_0)$, avec $y_0 \neq 0$.

Pour $x \neq 0$, on peut écrire $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = (-t+2t^2)e^{-t}$, avec $t = \dfrac{|y|}{x^2}$. Posons $v(t) = (-t+2t^2)e^{-t}$. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Il existe $t_0 > 0$ tel que $|v(t)| \leqslant \varepsilon$ si $t \geqslant t_0$. On a donc $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \varepsilon$ si $\dfrac{|y|}{x^2} \geqslant t_0$. Posons $A = |y_0| + 1$. On a alors $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \varepsilon$ dés que $|y - y_0| \leqslant 1$ et $|x| \leqslant \sqrt{\dfrac{A}{t_0}}$, ce qui démontre que $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right|$ tend vers $0$ quand $(x,y) \to (0,y_0)$.

En conclusion $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$est définie sur $\mathbb{R}^2$ et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

**Exercice 2.21.** *Centrale PC 2008, RMS page 148*

> Déterminer les extrema de $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

**Solution** La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$.

Les points critiques de $f$ sont les solutions du système : $\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x. \end{cases}$

On en déduit que $x^9 = x$, d'où $x = 0$, $x = 1$ ou $x = -1$. Les valeurs correspondantes de $y = x^3$ sont $y = 0$, $y = -1$, $y = 1$. On a donc trois points critiques : $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

On a $f(0,0) = 0$. Soit $h > 0$. On a $f(h,h) = 2h^4 - 4h^2 = -2h^2(2 - h^2) < 0$ pour $h < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f(h,-h) = 2h^2 + 4h^2 > 0$. Donc tout voisinage de $(0,0)$ contient des points $(x,y)$ tels que $f(x,y) > 0$ et des points $(x,y)$ tels que $f(x,y) < 0$. La fonction $f$ ne présente donc pas d'extremum en $(0,0)$. (C'est un point col).

On a $f(1,1) = -2$. Pour étudier $f$ au voisinage de $(1,1)$, posons $x = 1 + u$ et $y = 1 + v$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(1+u, 1+v) \\
&= (1+u)^4 + (1+v)^4 - 4(1+u)(1+v) \\
&= 6u^2 + 4u^3 + u^4 + 6v^2 + 4v^3 + v^4 - 4uv - 2 \\
&= 4u^2 + 4v^2 + 2(u-v)^2 + u^4 + 4u^3 + v^4 + 4v^3 - 2 \\
&= u^2(u^2 + 4u + 4) + v^2(v^2 + 4v + 4) + 2(u-v)^2 - 2 \\
&= u^2(u+2)^2 + v^2(v+2)^2 + (u-v)^2 - 2
\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x,y) > f(1,1)$ si $(u,v) \neq (0,0)$ et $(u,v) \neq (-2,-2)$, c'est à dire si $(x,y) \neq (1,1)$ et $(x,y) \neq (-1,-1)$. La fonction présente donc un minimum relatif strict aux points $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

**Exercice 2.22.** *Centrale PC 2008, RMS page 148*

> Soient $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et $K$ un réel positif. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K\|x-y\|^2$. Montrer que $f$ est constante.

**Solution**

Nous allons commencer par le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $g$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leqslant M\,|x-y|^2$ où $M$ est une constante.

Fixons $x$ dans $\mathbb{R}$. On a alors, pour $y \neq x$, $\left|\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leqslant M\,|x-y|$ et donc $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y} = 0$. Il en résulte que $g'(x) = 0$ et donc que $g' = 0$. La fonction $g$ est donc constante.

Soit alors $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K\|x-y\|^2.$$

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\overrightarrow{V} = (\alpha, \beta)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(M_0 + t\overrightarrow{V})$.

La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = df_{M_0}(\overrightarrow{V}).$$

Soit $(t,u) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$|g(t) - g(u)| = \left| f(M_0 + t\overrightarrow{U}) - f(M_0 + u\overrightarrow{U} \right| \leqslant K\|\overrightarrow{U}\|^2 \, |t-u|^2 \,.$$

Il résulte de l'étude précédente que $g' = 0$. On a donc $df_{M_0} = 0$ en chaque point $M_0 \in \mathbb{R}^2$. La différentielle de $f$ est donc nulle, ce qui démontre que $f$ est constante.

**Exercice 2.23.** *Centrale PC 2008, RMS page 148*

> (Avec Maple).
>
> Soit $f\colon (x,y) \mapsto \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} + xy - 2y$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
>
> 1) Tracer la surface d'équation $z = f(x,y)$. Que peut-on dire en $(0,0)$ ?
>
> 2) Calculer les dérivées partielles de $f$ en $(0,0)$. Tracer les surfaces d'équation $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $z = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Que voit-on ? Que peut-on en déduire ?

**Solution**

1) Le tracé de la surface (fig. (a)) est obtenu à l'aide du package `plots` grâce au instructions :

```
f:=(x,y)->(x*y^3)/(x^2+y^4)+x*y-2*y;
plot3d(f(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED);
```

Le tracé semble démontrer que $f$ est continue à l'origine.

Démontrons le en utilisant les coordonnées polaire. Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Lorsque $x = 0$ ou $y = 0$ on a $f(x,y) = 0$. Supposons $x \neq 0$ et $y \neq 0$. On a $x^2 + y^4 - 2\,|x|\,y^2 = (|x| - y^2)^2$ et donc $x^2 + y^4 \geqslant 2\,|x|\,y^2 = 2r^3\,|\cos\theta|\sin^2\theta$.

On a alors

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &\leqslant \frac{r^4\,|\cos\theta\sin^3\theta|}{2r^3\,|\cos\theta|\sin^2\theta} + r^2\,|\sin\theta\cos\theta| + 2r\,|\cos\theta| \\ &\leqslant \frac{r}{2} + r^2 + 2r\end{aligned}$$

On en déduit que : $f(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$, et donc que $f$ est continue au point $(0,0)$. Comme $f$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Confions à Maple le calcul des dérivées partielles $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ :

```
f1:=D[1](f);
f2:=D[2](f);
```

Le tracé des surfaces d'équations $z = f_1(x,y)$ (fig. (b)) et $z = f_2(x,y)$ (fig. (c)) s'obtient comme celui de la surface d'équation $z = f(x,y)$.

```
plot3d(f1(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED);
plot3d(f2(x,y),x=-1..1,y=-1..1,axes=BOXED);
```

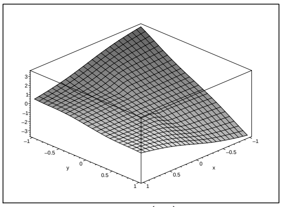

fig. $(a)$

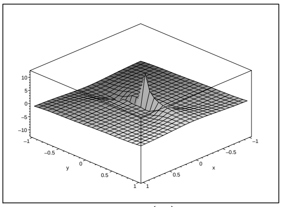

fig. $(b)$

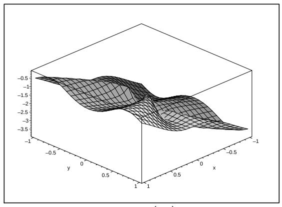

fig. $(c)$

Les dérivées partielles $f_1$ et $f_2$ sont évidemment continues sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Le tracé semble montrer que $f_1$ n'a pas de limite finie en $(0,0)$ et donc que que $f$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrons le :
Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(-x^2y + y^6 + x^4 + 2x^2y^4 + y^8)}{(x^2+y^4)^2}.$$

On en déduit que pour $y \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y + \dfrac{1}{y}$.
L'application $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ n'a pas de limite finie quand $y$ tend vers $+\infty$. Il en résulte que la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et donc que la fonction $f$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2.24.** *CCP PC 2008, RMS page 163*

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs et $T = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,; ax+by \leqslant ab\}$.

1) Tracer le domaine $T$.
2) Soit $f\colon (x,y) \mapsto x^2y^2(ax+by-ab)^2$. Déterminer le maximum de $f$ sur $T$.

## Solution

1) La droite d'équation $ax+by = ab$ est les droite passant par les points $A = (0,a)$ et $B = (b,0)$. Le domaine $T$ est donc le triangle (fermé) $OAB$.
On peut aussi remarquer (ce n'est pas utile pour la suite) que $f(x,y)$ représente le produit des carrés des distances du point $(x,y)$ aux côtés du triangle $T$.

2) La fonction $f$ est continue sur $T$ et $T$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Elle présente donc un maximum sur $T$. Comme $f$ prend des valeurs strictement positives, la valeur maximum $m_0$ de $f$ sur $T$ est strictement positive. Comme $f$ est nulle sur chacun des trois côtés du triangle $T$, la valeur maximum est atteinte en un (ou des) point(s) situé à l'intérieur de $T$.

   Comme de plus le fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (et donc aussi à l'intérieur de $T$), les points en lesquels $f$ présente un maximum sont des points critiques. Déterminons les points critiques :

   On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \big(2xy^2(ax+by-ab)+2ax^2y^2\big)(ax+by-ab)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial}(x,y) = \big(2yx^2(ax+by-ab)+2bx^2y^2\big)(ax+by-ab)$. Les points critiques $(x,y)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} xy^2(ax+by-ab)+ax^2y^2=0 \\ yx^2(ax+by-ab)+bx^2y^2=0. \end{cases}$$

   car il vérifient $ax+by-ab \neq 0$. On a aussi $x \neq 0$ et $y \neq 0$, donc $(x,y)$ est solution du système

$$\begin{cases} (ax+by-ab)+ax=0 \\ (ax+by-ab)+by=0. \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} 2ax+by=ab \\ ax+2by=ab. \end{cases}$$

   On obtient $(x,y) = \left(\frac{b}{3}, \frac{a}{3}\right)$. Il s'agit du centre de gravité du triangle $T$. La valeur maximale de $f$ est alors $m_0 = \dfrac{a^4b^4}{9^3}$.

**Exercice 2.25.** *CCP PC 2008, RMS page 158*

> Soient $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f\colon (x,y) \mapsto x^3 - 3x(1+y^2)$ et soit $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \,;\, x+y \leqslant 1\}$.
>
> 1) Montrer que $f$ admet un minimum et un maximum sur $D$.
>
> 2) $f$ admet-elle est extrema sur $\mathbb{R}^2$ ?

## Solution

1) Le domaine $D$ est le triangle (fermé) dont les sommets sont $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ et $B=(0,1)$. Comme $f$ est continue et $D$ est compact, la restriction de $f$ à $D$ présente un maximum et un minimum.

2) La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Les extrema éventuels de $f$ sur $\mathbb{R}^2$ sont des points critiques de $f$.

   On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2-3y^2-3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)(x,y) = -6xy^2$. Les valeurs de $(x,y)$ qui annulent les deux dérivées partielles sont $(0,1)$,$(0,-1)$,$(1,0)$ et $(-1,0)$.

   Etudions les points critiques $(0,1)$ et $(0,-1)$. On a $f(0,1) = f(0,-1) = 0$ et $f(x,1) = 2x(x-3)$. Pour $|x| < 3$, on a $f(x,1) > 0$ si $x < 0$ et $f(x,1) < 0$ si $x > 0$. Ainsi dans tout voisinage de $(0,1)$ $f$ prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. Il n'y a donc pas d'extremum au point $(0,1)$. (Il s'agit d'un point col). L'étude est la même au point $(0,-1)$.

Etude des points critiques $(1,0)$ et $(-1,0)$. On a $f(1,0) = f(-1,0) = 0$ et $f(x,0) = 3(x-1)(x+1)$. On a $f(x,0) > 0$ si $x > 1$ et $f(x,0) < 0$ si $0 < x < 1$. La situation est la même que précédemment : le point $(1,0)$ est un point col. L'étude du point $(-1,0)$ est analogue.

La fonction $f$ ne présente pas d'extremum relatif sur $\mathbb{R}^2$.

Notons que ce résultat n'est pas en contradiction avec le résultat de la première question : il montre que les maximum et minimum de $f$ sur $D$ ne sont pas situés à l'intérieurs de $D$ (sinon ce seraient des points critiques de $f$). Ils sont donc situés sur les côtés du triangle.

**Exercice 2.26.** *Centrale PSI 2007, ODT page 15*

> Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche une fonction $F$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
>
> 1) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x,0) = f(x)$,
>
> 2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ F(x+2\pi,t) = F(x,t)$ ;
>
> 3) La dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ existe sur $\mathbb{R}^2$, est continue et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial F}{\partial t}$.
>
> Montrer que s'il existe une solution $F$, elle est unique.
>
> Montrer que si $f$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, il existe une solution.

## Solution

Supposons qu'il existe une solution $F$. La condition $(2)$ entraîne alors que $f$ est $2\pi$-périodique et la condition $(3)$ entraîne que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Il en résulte que $f$ est égale à la somme de sa série de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

et que l'on a $a_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $b_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $t$ fixé dans $\mathbb{R}$, l'application $F_t \colon x \mapsto F(x,t)$ est elle aussi $2\pi$-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$. Si on désigne par $A_n(t)$ (resp. $B_n(t)$ ) ses coefficients de Fourier, on a donc :

$$F(x,t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n(t)\cos nx + B_n(t)\sin nx)$$

et $A_n(t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $B_n(t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x,t)\,dx$. Soit $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $a < b$. Comme les fonctions $F$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, elles sont bornées sur $[0, 2\pi] \times [a, b]$. Les hypothèses de domination du théorème de dérivation sous le signe somme sont donc vérifiées. Il en résulte que la fonction $t \mapsto A_n(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(2\pi,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(0,t)\right) = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que $A_n(t)$ est une constante et puisque $A_n(0) = a_n$, on a $A_n(t) = a_n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On démontre de même que $B_n(t) = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**Exercice 2.27.** *Mines-Ponts PC 2008, RMS page 102*

> Trouver une équation aux dérivées partielles caractérisant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{y}\right)$ où $g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

## Solution

Supposons qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

La fonction $f$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} g'\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} g'\left(\frac{x}{y}\right).$$

On en déduit que pour tout $(x,y) \in U$ , $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Réciproquement soit $f$ une solution sur l'ouvert $U$ de l'équations aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Soit $\Phi$ l'application de $U$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\forall (x,y) \in U,\ \Phi(x,y) = \left(\frac{x}{y}, y\right)$.

L'application $\Phi$ est une bijection de $U$ sur $U$ car pour tout $(u,v) \in U$, le système :

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = u \\ y = v \end{cases}$$

admet un unique solution dans $U$ : $y = v$, $x = uv$.

Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ car chacune des deux fonctions $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ et $(x,y) \mapsto y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.

Enfin en chaque point $(x,y) \in U$ le jacobien de $\Phi$ : $J_\Phi(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y}$ est non nul. Il en résulte que $\Phi$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $U$ sur lui même dont le difféomorphisme réciproque est l'application $\Phi^{-1}$: $(x,y) \mapsto (xy,y)$.

Nous allons utiliser le difféomorphisme $\Phi$ pour résoudre l'équation aux dérivées partielles $(1)$.

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$ et soit $h$ la fonction $h = f \circ \Phi^{-1}$. On alors, pour tout $(u,v) \in U$, $h(u,v) = f(uv,v) = f(x,y)$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= u\frac{\partial f}{\partial x}(uv,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(uv,v) \\ &= \frac{1}{y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \end{aligned}$$

Pour que $f$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles $(1)$, il faut et il suffit que $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$, c'est à dire que $h$ soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la seule variable $u$.

On a donc $h(u,v) = g(u)$ et donc $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$ où $g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 2.28.** *Centrale PSI 2008, RMS page 140*

> Etudier les extrema de la fonction $f$: $(x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x+y)$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi, 0 \leqslant x+y \leqslant \pi\}$.

**Solution** Le domaine $D$ est le triangle (fermé) de sommets $O = (0,0)$, $A = (\pi,0)$ et $B = (0,\pi)$.

La fonction $f$ est identiquement nulle sur chacun des trois côtés du triangle $D$ et prend des valeurs strictement positives à l'intérieur de $D$. La fonction $f$ présente donc un minimum (absolu) en chaque point appartenant à l'un des trois côtés de $D$.

Les autres extrema de $f$ sont situés à l'intérieur de $D$. Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, ce sont des points critiques de $f$. Déterminons donc les points critiques situés à l'intérieur de $D$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sin(y)(\cos(x)\sin(x+y)+\sin(x)\cos(x+y)\\ &= \sin(y)(\sin(2x+y))\end{aligned}$$

et on calcule de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x)(\sin(x+2y))$.

Comme $\sin(x)$ et $\sin(y)$ ne s'annulent à l'intérieur de $D$ le seul point critique situé à l'intérieur de $D$ est le point $(x,y)$ tel que $x+2y = 2x+y = \pi$, c'est à dire $(x,y) = \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

Par ailleurs, $f$ étant continue sur $D$, on sait que $f$ présente un maximum sur $D$. Ce maximum est donc atteint au point $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

La valeur maximale de $f$ sur $D$ est $\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ et sa valeur minimale $0$.

**Exercice 2.29.** *Ecole Polytechnique, ESPCI PC 2008, RMS page 76*

> Soient $f_1$ et $f_2$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que $f_1'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\Phi$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $\Phi^{-1}(f(x)) = (x,0)$. Le difféomorphisme $\Phi$ est-il unique ?

## Solution

Cherchons un difféomorphisme $\Phi\colon (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi^{-1}(f(x)) = (x,0)$. Cette relation équivaut à $(f_1(x), f_2(x)) = (u(x,0), v(x,0))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons par exemple $u(x,y) = f_1(x)$ et $v(x,y) = f_2(x) + y$. La fonction $\Phi = (u,v)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ puisque chacune de ses composante est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Déterminons l'image de $\Phi$. Comme la dérivée $f_1'$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $f_1$ est difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. La fonction $\Phi$ prend donc ses valeurs dans l'ouvert $I \times \mathbb{R}$.

Soit $(x', y') \in I \times \mathbb{R}$.

Déterminons les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\Phi(x,y) = (f_1(x), f_2(x) + y) = (x', y')$. Il existe un unique $x$ tel que $f_1(x) = x'$ (car $f_1$ est bijective) et $y$ est ensuite déterminé de manière unique par $y = y' - f_2(x)$. Il en résulte que $\Phi$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $U$.

Le jacobien de $\Phi$ au point $(x,y)$ est :

$$J_\phi(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1'(x) & 0 \\ f_2'(x) & 1 \end{vmatrix} = f_1'(x) \neq 0.$$

Il en résulte que $\Phi$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $U$ et il vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(u(x,0), v(x,0)) = (f_1(x), f_2(x))$.

La solution trouvée n'est bien sûr pas unique. On peut prendre pour $u$ et $v$ les fonctions définies par $u(x,y) = f_1(x)$ et $v(x,y) = f_2(x) + g(y)$ où $g$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g(0) = 0$ (par exemple $g(y) = 2y$)).

**Exercice 2.30.** *Ecole Polytechnique PC 2007, RMS page 89*

> Résoudre l'équation aux dérivées partielles $2x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y(1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
>
> *Indication :* On pourra poser $x = \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ et $y = \frac{u}{v}$.

**Solution** Considérons l'application $\varphi$ définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans l'ouvert $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, définie par :

$$(u,v) \mapsto \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(u^2+v^2) \\ y = \frac{u}{v}\,. \end{array} \right.$$

C'est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ et elle est à valeurs dans $V$. Cherchons à déterminer les antécédents d'un élément $(x,y) \in V$. On doit avoir $u^2+v^2 = x$ et $u = vy$. On en déduit $v^2(1+y^2) = x$ d'où, puisque $v > 0$, $v = \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}$ et $u = y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}$. Ainsi tout élément de $V$ possède un unique antécédent dans $U$, ce qui démontre que $\varphi$ est une bijection de $U$ sur $V$.

La matrice jacobienne de $\varphi$ au point $(u,v)$ est $J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u & v \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix}$. Son déterminant $-\dfrac{u^2+v^2}{v^2}$ est non nul. Il en résulte que $\varphi$ est un difféomorphisme de $U$ sur $V$.

Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V$ et soit $g$ la fonction définie sur $U$ par

$$\forall (u,v) \in U,\ g(u,v) = f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}(u^2+v^2), \frac{u}{v}\right).$$

Comme $g = f \circ \varphi$, $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a : $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} = u\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} = v\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{u}{v^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}\,. \end{cases}$

En multipliant la seconde égalité par $\left(v + \dfrac{u^2}{v}\right)$, on obtient :

$$\left(v+\frac{u^2}{v}\right)\frac{\partial g}{\partial v} = (u^2+v^2)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{u}{v}\left(1+\frac{u^2}{v^2}\right) = 2x\frac{\partial f}{\partial x} - y(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Il en résulte que $f$ est solution de l'équation $(E)$ si et seulement si $\dfrac{\partial g}{\partial v} = 0$, c'est à dire si et seulement si $g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la seule variable $u$.

Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g\left(2y\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right) = h\left(y\sqrt{\frac{x}{1+y^2}}\right)$$

où $h$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ arbitraire de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Remarquons que si $f$ est une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, alors la fonction $(x,y) \mapsto f(-x,y)$ est une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$. Les solutions de $(E)$ sur $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme $f(x,y) = h\left(y\sqrt{\dfrac{-x}{1+y^2}}\right)$.

**Exercice 2.31.** *Centrale-Supélec PSI 2007, RMS page 150*

1) Enoncer le théorème de Schwarz.

2) Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Le théorème de Schwarz s'applique-t-il au point $(0,0)$ ?

## Solution

1) Enonçons le théorème de Schwarz pour une fonction de deux variables : soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$. On a alors,

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

2) La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions continues. Démontrons la continuité en $(0,0)$. Soit $(x,y)$ un point de $\mathbb{R}^2$ distinct de $(0,0)$. En passant en coordonnées polaires on voit qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

   On a alors $|f(x,y)| = r^2\left|cos\theta \sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right| \leqslant 2r^2$. Il en résulte que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ et donc $f$ est continue au point $(0,0)$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

   Démontrons maintenant que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On voit d'abord de façon évidente qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on obtient (à l'aide de Maple par exemple) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

   En passant en coordonnées polaires on voit que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\cos\theta(\cos^4\theta - \sin^4\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = r\sin\theta(\cos^4\theta - \sin^4\theta - 4\sin^2\theta\cos^2\theta).$$

Il en résulte que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

Par ailleurs les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont nulles. La fonction $f$ admet donc des dérivées partielles par rapport à $x$ et par rapport à $y$ en $(0,0)$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$, ce qui démontre que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Nous allons maintenant démontrer que $f$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$. L'application partielle $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et au point $y = 0$ en particulier, on a $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = -1.$

On a de même pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x.$

L'application partielle $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ est donc elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et au point $x = 0$ on a $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 1.$

On a donc : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

Grâce au théorème de Schwarz on voit que $f$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2.32.** *ENSEA PSI 2007, ODT page 29*

> Soit $M$ un point intérieur à un triangle quelconque $ABC$. On note $D$, $E$, $F$ les projections orthogonales de $M$ sur les côtés $AB$, $BC$ et $CA$ respectivement et $p$, $q$, $r$ les distances de $M$ à $D$, $E$, $F$ respectivement. Montrer que la fonction $M \mapsto f(M)$ admet un maximum et le déterminer.

## Solution

L'application qui à $M$ associe sa distance à l'un des côtés du triangle est continue sur le plan $\mathbb{R}^2$. L'application $M \mapsto f(M)$ est donc continue. Comme le triangle (fermé) $T = ABC$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$, $f$ admet un maximum sur $T$. Comme de plus $f$ prend des valeurs strictement positives à l'intérieur de $T$, $f$ atteint son maximum en un (ou des) point(s) situés à l'intérieur de $T$.

Soient $c$ la longueur du côté $AB$, $a$ celle du côté $BC$ et $b$ celle du côté $CA$.

L'aire $S$ du triangle $ABC$ est égale à la somme des aires des triangles $MAB$, $MBC$ et $MCA$. On a donc pour tout point $M$ intérieur au triangle : $cp + aq + br = 2S$.

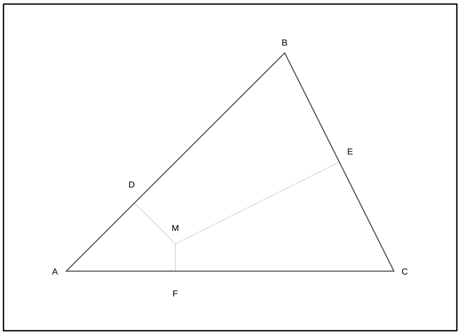


**FIG. 0.2.**

On a donc $f(M) = \frac{1}{b}pq(2S - cp + aq)$. Nous sommes donc conduit à chercher le maximum de la fonction $g\colon (p,q) \mapsto \frac{1}{b}pq(2S - cp + aq)$ sur l'ouvert $D = \{(p,q)\,;\, p > 0, q > 0, cp + aq < 2S\}$.

Comme la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $D$, le maximum est atteint en un point critique de $g$.

Or on a $\frac{\partial g}{\partial p}(p,q) = \frac{q}{b}(2S - 2cp - aq)$ et $\frac{\partial g}{\partial q}(p,q) = \frac{p}{b}(2S - cp - 2aq)$. Comme $p$ et $q$ son non nuls les points critiques de $g$ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} 2cp + aq = 2S \\ cp + 2aq = 2S. \end{array}\right.$.

Il existe donc un unique point critique : $(p,q) = \left(= \frac{2S}{3c}, \frac{2S}{3a}\right)$ et on a alors $r = \frac{2S}{3b}$.

Le maximum du produit des distances est donc $g(p,q) = pqr = \frac{8S^3}{9abc}$.

Notons $M_0$ le point du triangle en lequel ce maximum est atteint. L'aire du triangle $M_0BC$ est égale à $\frac{1}{2}aq = \frac{S}{3}$. Il en résulte que la hauteur $q$ de ce triangle relative au sommet $M_0$ est égale au tiers de la hauteur du triangle $ABC$ relative au sommet $A$ et il en est de même pour les deux triangles $M_0BC$ et $M_0CA$. On en déduit aisément que $M_0$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.

**Exercice 2.33.** *CCP PC 2007,ODT page 21*

> Soient $E$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $a$ un nombre réel.
> A chaque fonction $f \in E$ on associe la fonction $\Omega_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}$.
>
> Montrer que $\Omega_a$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$.
>
> 2) Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in E$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = F(x, y - ax)$.
> Déterminer $\operatorname{Ker}(\Omega_a)$ et $\operatorname{Ker}(\Omega_a^2)$.

3) Calculer $\Omega_a^2(f)$ et $\Omega_a^3(f)$. Conjecturer une expression possible de $\Omega_a^n(f)$ et vérifier cette conjecture.

## Solution

1) Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, alors ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il en résulte que $\Omega_a(f) \in E$.
Soient $f$ et $g$ deux élément de $E$ et $\lambda$ un réel non nul. On a alors
$$\begin{aligned}\Omega_a(f+\lambda g) &= \frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial x} + a\frac{\partial(f+\lambda g)}{\partial y}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y} + a\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x} + a\frac{\partial g}{\partial y}\right)\\ &= \Omega_a(f) + \lambda\Omega_a(g).\end{aligned}$$
L'application $\Omega_a$ est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $E$.

2) Soit $\Phi$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y) = (x, y+ax)$. C'est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. C'est donc aussi un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, et on a $\Phi^{-1}(x,y) = (x, x-ay)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, il existe une unique fonction $F$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = F\circ\Phi^{-1}$. Elle est définie par $F = f\circ\Phi$. Si de plus $F$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $F(x,y) = f(x, y+ax)$, d'où
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y+ax) + a\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y+ax)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y+ax)$.
On observe que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \Omega_a(f)(x,y+ax)$.
Il en résulte que $f\in\mathrm{Ker}(\Omega_a)$ si et seulement si $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, c'est à dire si et seulement si $F$ est fonction de la seule variable $y$ : $F(x,y) = g(y)$ où $g$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a alors $f(x,y) = F(x, y-ax) = g(y-ax)$. Les fonctions appartenant à $\mathrm{Ker}(\Omega_a)$ sont donc les fonctions de la forme :
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(y-ax).$$
Déterminons maintenant le noyau de $\Phi_a^2$. Partons à nouveau de $f\in E$, et considérons $F$ définie par $F(x,y) = f(x, y+ax)$. On calcule facilement $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a\dfrac{\partial f^2}{\partial x\partial y} + a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Phi_a^2(f)$. Ainsi $f$ appartient à $\mathrm{Ker}(\Phi_a^2)$ si et seulement si $F$ vérifie l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$. Les solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de cette équation sont les fonctions de la forme $F(x,y) = xG(y) + H(y)$ où $G$ et $H$ sont des fonctions arbitraires de classe $\mathcal{C}^\infty$

sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $f$ appartenant au noyau de $\Phi_a^2$ sont donc les fonctions de la forme $f(x,y) = xG(y-ax) + H(y-ax)$.

3) Soit $f \in E$. On a déjà calculé $\Phi_a^2(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a\dfrac{\partial f^2}{\partial x \partial y} + a^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

On en déduit

$$\begin{aligned}
\Phi_a^3(f) &= \frac{\partial \Phi_a^2(f)}{\partial x} + a\frac{\partial \Phi_a^2(f)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 2a\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + a^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + a\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 2a^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + a^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3a\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3a^2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + a^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}
\end{aligned}$$

On peut alors conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\Phi_a^n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}. \tag{1}$$

Démontrons cette relation par récurrence sur $n$. La relation est vraie à l'ordre $n = 1, 2, 3$. Si on la suppose vérifiée à l'ordre $n$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_a^{n+1}(f) &= \frac{\partial \Phi_a^n(f)}{\partial x} + a\frac{\partial \Phi_a^n(f)}{\partial y} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n-k} \partial y^{k+1}} \\
&= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} a^k \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}
\end{aligned}$$

La relation est vérifiée à l'ordre $n+1$. Elle est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## 2.6 COURBES-CONIQUES

**Exercice 2.34.** *CCP PC 2007, ODT page 23*

> Nature de la courbe d'équation $C\ :\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Ecrire une équation de la tangente à $C$ en un de ses points $(x_0,y_0)$.

**Solution**

Il s'agit d'une ellipse de centre $O$ dont les axes de symétrie sont les axes $Ox$ et $Oy$.

Posons $f(x,y)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1$. L'application $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. En chaque point $M_0=(x_0,y_0)$ de $C$ on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=\left(\frac{x_0}{2},\frac{2y_0}{9}\right)\neq(0,0).$$

Le point $M_0$ est donc un point régulier et la tangente à $C$ au point $M_0$ est la droite d'équation $(x-x_0)\dfrac{x_0}{2}+(y-y_0)\dfrac{2y_0}{9}=0$. L'équation peut encore s'écrire $\dfrac{xx_0}{2}+\dfrac{2yy_0}{9}=2\left(\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{9}\right)=2$. Il s'agit donc de la droite d'équation $\dfrac{xx_0}{2}+\dfrac{2yy_0}{9}=2$.

**Exercice 2.35.** *CCP PC 2007, ODT page 23*

> Soit $k$ un réel non nul. On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(0,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on pose $\overrightarrow{u}(\theta)=\cos\theta\,\overrightarrow{\imath}+\sin\theta\,\overrightarrow{\jmath}$ et $M(\theta)=O+e^{k\theta}\overrightarrow{u}(\theta)$. On désigne par $C$ la courbe décrite par $M(\theta)$.
>
> Déterminer un vecteur directeur de la tangente à $C$ au point $M(\theta)$ et donner ensuite une équation cartésienne de la tangente.
>
> Déterminer un vecteur directeur de la normale à $C$ au point $M(\theta)$ et donner une équation cartésienne de la normale.

**Solution**

Il s'agit de la courbe d'équation polaire $\rho=e^{k\theta}$. L'application $\rho\colon\theta\mapsto e^{k\theta}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, tous les points de la courbe sont réguliers.

Posons $\overrightarrow{v}(\theta)=\overrightarrow{u}'(\theta)=-\sin\theta\,\overrightarrow{\imath}+\cos\theta\,\overrightarrow{\jmath}$. La tangente à $C$ au point $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(\theta)=\frac{dM}{d\theta}&=\rho'(\theta)u(\theta)+\rho(\theta)v(\theta)\\&=ke^{k\theta}u(\theta)+e^{k\theta}v(\theta)\\&=e^{k\theta}\big[(k\cos\theta-\sin\theta)\overrightarrow{\imath}+(k\sin\theta+\cos\theta)\overrightarrow{\jmath}\big].\end{aligned}$$

La tangente à $C$ au point $M(\theta)$ est la droite passant par $M(\theta)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{V}(\theta)$. Il s'agit donc de la droite d'équation :

$$\begin{vmatrix} x - e^{k\theta}\cos\theta & e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta) \\ y - e^{k\theta}\sin\theta & e^{k\theta}(k\sin\theta + \cos\theta \end{vmatrix} = 0,$$

c'est à dire $x(k\sin\theta + \cos\theta) - y(k\cos\theta - \sin\theta) = e^{k\theta}$.

La normale au point $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur

$$\overrightarrow{N}(\theta) = e^{k\theta}\big[-(k\sin\theta + \cos\theta)\overrightarrow{\imath} + (k\cos\theta - \sin\theta)\overrightarrow{\jmath}\big].$$

La normale au point $M(\theta)$ est la droite d'équation :

$$\begin{vmatrix} x - e^{k\theta}\cos\theta & -e^{k\theta}(k\sin\theta + \cos\theta) \\ y - e^{k\theta}\sin\theta & e^{k\theta}(k\cos\theta - \sin\theta) \end{vmatrix} = 0,$$

c'est à dire $x(k\cos\theta - \sin\theta) + y(k\sin\theta + \cos\theta) = ke^{k\theta}$.

**Exercice 2.36.** *CCP PC 2007, ODT page 23*

> Tracer la courbe $C$ définie par la paramétrisation $\begin{cases} x(t) = 5t^4 \\ y(t) = 4t^5. \end{cases}$

**Solution**

Les application $x$ et $y$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La courbe $C$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$. On peut donc limiter l'étude à l'intervalle $[0, +\infty[$ et compléter le tracé par une symétrie par rapport à l'axe $(Ox)$. Traçons le tableau des variations :

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | $0$ | $+$ | |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | $0$ | $+$ | |

Lorque $t$ tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent tous les deux vers $+\infty$. La courbe présente donc une branche infinie. On a de plus $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{4t}{5} \to +\infty$. Elle présente donc une branche parabolique dans la direction de l'axe $(Oy)$.

L'origine est un point stationnaire de la courbe puisque $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. Comme $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to 0$ quand $t$ tend vers $0$, la pente de la tangente à l'origine est nulle.

On en déduit facilement le tracé de la courbe.

On peut alors facilement obtenir le tracé de la courbe. Le tracé suivant est obtenu grâce à Maple :

```
plot([5*t^4,4*t\c{c}5/(1+t^4),t=-2..+2]);
```

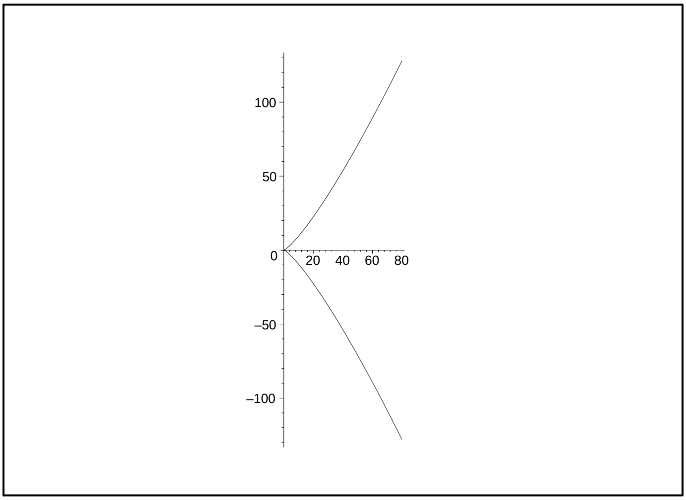


**FIG. 0.3.** La courbe définie par $x(t) = 5t^4, y(t) = 4t^5$.

**Exercice 2.37.** *Mines-Ponts PSI 2007, ODT page 17*

> Tracer la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = \dfrac{\theta+1}{\theta-1}$.

**Solution** La fonction $\rho$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Pour tout $\theta \in D$, on a $\rho'(\theta) = \dfrac{-2}{(\theta-1)^2}$. La fonction $\rho$ est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Lorsque $\theta \to +\infty$, $\rho(\theta)$ tend vers 1. Le cercle d'équation polaire $\rho = 1$ est asymptote à la courbe. Comme $|\rho(\theta)| < 1$ la courbe est située à l'intérieur du disque de rayon 1.

Lorsque $\theta$ décrit l'intervalle $]-\infty, -1]$, $\rho$ décroît de 1 à 0. La courbe passe par l'origine avec pour tangente la droite d'équation polaire $\theta = -1(radian)$.

Lorsque $\theta$ décrit l'intervalle $[-1, 1[$, $\rho$ décroît de $0$ à $-\infty$. La courbe présente donc une branche infinie lorsque $\theta$ tend vers 1.

Plaçons nous dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u} = \cos(1)\overrightarrow{\imath} + \sin(1)\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = -\sin(1)\overrightarrow{\imath} + \cos(1)\overrightarrow{\jmath}$. Les coordonnées $X$ et $X$ du point $M$ de la courbe de paramètre $\theta$ vérifient $X = \rho(\theta)\cos(\theta - 1)$ et $Y = \rho(\theta)\sin(\theta-1) \sim (1+\theta)$. On a donc $X \to +\infty$ et $Y \to 2$ quand $\theta \to 1$. la droite d'équation $Y = 2$ est asymptote à la courbe. Comme $1 + \theta < 2$, la courbe est située au dessous de l'asymptote.

Etudions pour finir la courbe lorsque $\theta$ décrit l'intervalle $]1, +\infty[$. Lorsque est au voisinage de 1 (et $> 1$) le point $M(\theta)$ est au dessus de son asymptote d'équation

$X = 2$. Le point de paramètre $M(\theta)$ tourne ensuite autour de l'origine et $\rho(\theta)$ tend vers 1. Le cercle d'équation polaire $\rho = 1$ est à nouveau asymptote à la courbe.

Le tracé suivant a été obtenu à l'aide de Maple. On a représenté sur le même dessin

- l'arc de courbe obtenu lorsque $t$ décrit $[-8\pi, 0.8]$,
- l'arc de courbe obtenu lorsque $t$ décrit $[1.3, 8\pi]$,
- le cercle asymptote $\rho = 1$,
- l'asymptote $X = 2$.

```
plot([[r(t)*cos(t),r(t)*sin(t),t=-8*Pi..0.8],
[r(t)*cos(t),r(t)*sin(t),t=1.3..8*Pi],
[cos(t),sin(t),t=-Pi..Pi],
[cos(1)*t+2*sin(1),sin(1)*t+2*cos(1),t=-8..6]]
,scaling=CONSTRAINED,color=[blue,red,black,black],thickness=2);
```

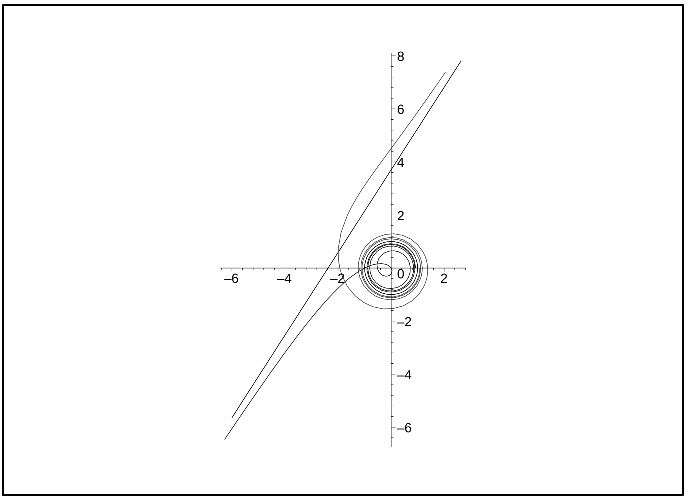


**FIG. 0.4.** La courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\theta + 1}{\theta - 1}$.

### **Exercice 2.38.** *Mines-Ponts PC 2007, ODT page 15*

> Soient $I$ un intervalle réel, $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $\mathbb{R}$, $M$ le point d'abscisse $x$ de la courbe $C$ d'équation $y = f(x)$ et $P$ le point d'intersection de la tangente à $C$ en $M$ avec l'axe $(0x)$. On suppose que $MP$ est une constante strictement positive $a$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction $f$.

### Solution

Les hypothèses de l'énoncé entraînent que les fonctions $f$ et $f'$ ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$. Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle garde un signe constant et quitte à remplacer $f$ par $-f$, on peut supposer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in I$. La tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0$ est la droite d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$. Elle coupe l'axe $(Ox)$ au point $P$ d'abscisse $x$ tel que $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0$. On obtient donc $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On a alors $MP^2 = (x - x_0)^2 + (f(x_0))^2 = \dfrac{(f(x_0))^2}{(f'(x_0))^2} + (f(x_0))^2$. La condition de l'énoncé s'écrit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x))^2 \left(1 + \frac{1}{(f'(x))^2}\right) = a^2.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f'(x))^2 = \frac{a^2 - (f(x))^2}{(f(x))^2}.$$

Comme la fonction $f'$ est continue sur $I$ et ne s'annule pas, elle garde un signe constant. Il en résulte que $f$ est solution de l'une ou l'autre des équations différentielles $y' = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ $(1)$ ou $y' = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ $(2)$.

Remarquons d'ailleurs que pour que $f$ soit solution de l'équation $(2)$, il faut et il suffit que la fonction $z$ définie sur l'intervalle $I' = \{x \in \mathbb{R}\,;\, -x \in I\}$ par $\forall x \in I',\ z(x) = y(-x)$ soit solution de $(1)$. En d'autres termes les courbes intégrales de l'équation $(2)$ sont les symétriques par rapport à l'axe $(Oy)$ des courbes intégrales de l'équation $(1)$.

Bien que la question ne soit pas posée, nous allons déterminer les courbes intégrales de l'équation différentielle $(1)$ correspondant aux solutions $f$ telles que $f$ et $f'$ ne s'annule pas sur $I$.

La fonction $f$ est alors un difféomorphisme de $I$ sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$. Notons $g$ le difféomorphisme réciproque. La courbe intégrale d'équation $y = f(x)$ est aussi la courbe d'équation $x = g(y)$.

Pour tout $y \in J$ on a $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))} = \dfrac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$.

Nous sommes donc conduits à déterminer les primitives de la fonction $h\colon\, y \mapsto \dfrac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ sur l'intervalle $]-a, a[$.

Posons $H(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du$.

L'application $t \mapsto u = a\sin t$ est un difféomorphisme de de l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ sur l'intervalle $]-a, a[$ dont le difféomorphisme réciproque est l'application $u \mapsto \arcsin(u/a)$. En effectuant le changement de variable $u = a\sin t$ on obtient :

$$\begin{aligned}
H(y) &= \int_0^{\arcsin(y/a)} \frac{a^2\cos^2 t}{a\sin t}\,dt \\
&= a\int_0^{\arcsin(y/a)} \frac{\cos^2 t\sin t}{\sin^2 t}\,dt \\
&= a\int_0^{\arcsin(y/a)} \frac{\cos^2 t\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt \\
&= -a\int_1^{\cos(\arcsin(y/a))} \frac{v^2}{1-v^2}\,dv \\
&= -a\int_1^{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}} \frac{v^2}{1-v^2}\,dv \\
&\qquad \text{(changement de variable } v = \cos t\text{).}
\end{aligned}$$

Or : $\dfrac{v^2}{1-v^2} = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v}\right)$.
D'où :

$$\begin{aligned}
H(y) &= a\int_1^{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}} \left(1 + \frac{1}{2(v-1)} - \frac{1}{2(v+1)}\right) dv \\
&= a\left[v + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right)\right]_1^{\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}} \\
&= a\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}} - a + a\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}}\right)
\end{aligned}$$

Les courbes intégrales sont donc les courbes d'équation

**Exercice 2.39.** *Centrale PC 2007, ODT page 11*

> Soit $D$ une droite du plan passant par l'origine et distincte de l'axe $(Oy)$. Donner le lieu du sommet des paraboles d'axe parallèle à l'axe $(Oy)$ auxquelles la droite $D$ est tangente en $0$.

### Solution

Soit $m$ la pente de la droite $D$.

Une parabole $P$ passant par l'origine et dont l'axe est parallèle à l'axe $(Oy)$ a une équation de la forme $y = tx^2 + ux$, avec $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ et $t \neq 0$. La pente de la tangente au point d'abscisse $x$ de $P$ est alors $y'(x) = 2tx + u$. En particulier la pente de la tangente à la parabole en $O$ est $y'(0) = u$.

Pour que $D$ soit la tangente à $P$ au point $O$, il faut et il suffit que $u = m$, c'est à dire que l'équation de $P$ soit de la forme $y = tx^2 + mx$ où $t$ est un réel arbitraire non nul.

Le sommet $S = (x_S, y_S)$ est le point de $P$ dont l'abscisse $x_S$ annule $y'(x)$. On a donc $x_S = -\frac{m}{2t}$ et $y_S = ax_S^2 + mx_S = -\frac{m^2}{4t^2}$.

Si $m = 0$ (c'est à dire si $D$ est l'axe $(Ox)$) on a : $x_S = y_S = 0$ et donc $S = O$.

Pour $m \neq 0$ le lieu du sommet $S$ est la courbe définie par la paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{m}{2t} \\ y(t) = -\dfrac{m^2}{4t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}^*.$$

Il s'agit de la parabole d'équation $y = -x^2$ privée du point $O$.

**Exercice 2.40.** *Centrale PC 2007, ODT page 11*

> Soient $p$ un réel strictement positif et $(P)$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$.
>
> 1) Donner une équation de la normale en un point $M$ de $(P)$.
>
> 2) Que peut-on dire de l'isobarycentre de trois points de la parabole en lesquels les normales sont concourantes.
>
> 3) Que peut-on dire de l'isobarycentre de quatre points cocycliques de $(P)$ ?

### Solution

1) Définissons la parabole $(P)$ par la paramétrisation $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$.

   La tangente à $(P)$ au point de paramètre $t$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{V}(t) = \left(\frac{t}{p}, 1\right)$.

   La normale à $(P)$ au point de paramètre $t$ est la droite passant par le point $\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$ et orthogonale à $\overrightarrow{V}(t)$. Il s'agit donc de la droite d'équation $\left(x - \frac{t^2}{2p}\right)\frac{t}{p} + (y-t) = 0$, ou

$$tx + py = \frac{t^3}{2p} + pt.$$

2) Soient $u, v, w$ trois nombres réels distincts, et soit $M(u)$, $M(v)$ et $M(w)$ les points de paramètre respectif $u$, $v$ et $w$.

Les coordonnées $(x, y)$ du point d'intersection des normales aux points $M(u)$ et $M(v)$ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} ux + py = \dfrac{u^3}{2p} + pu \\ vx + py = \dfrac{v^3}{2p} + pv. \end{cases}$$

Par soustraction on obtient $(u - v)x = \frac{1}{2p}(u^3 - v^3) + p(u - v)$, d'où $x = p + \dfrac{u^2 + uv + v^2}{2p}$.

On en déduit de même que l'abscisse du point d'intersection des normales aux point $M(v)$ et $M(w)$ est $p + \dfrac{v^2 + vw + w^2}{2p}$.

Pour que les trois normales soient concourantes, il faut et il suffit que

$$u^2 + uv + v^2 = v^2 + vw + w^2,$$

c'est à dire que $u^2+uv = w^2+vw$. Cette relation s'écrit encore $u^2-w^2 = vw-uv$, c'est à dire $u + v + w = 0$.

On a alors $\dfrac{y(u) + y(v) + y(w)}{3} = 0$. L'isobarycentre des points $M(u)$, $M(v)$, $M(w)$ est donc situé sur l'axe $(Ox)$.

3) Soient $t, u, v, w$ quatre réels distincts. Le centre $C_1$ du cercle circonscrit au triangle $M(t), M(u), M(v)$ est le point d'intersection des médiatrices des segments $M(t)M(u)$ et $M(u)M(v)$.

La médiatrice du segment $M(t)M(u)$ est la droite passant par le milieu du segment : $\left(\dfrac{t^2 + u^2}{4p}, \dfrac{t + u}{2}\right)$ et orthogonale au vecteur

$$\overrightarrow{M(t)M(u)} = \left(\frac{u^2 - t^2}{2p}, u - t\right) = \frac{u - t}{2p}(u + t, 2p).$$

Elle est donc dirigée par le vecteur $(-2p, t+u)$. Il s'agit donc de la droite d'équation $\begin{vmatrix} x - \dfrac{t^2 + u^2}{4p} & -2p \\ y - \dfrac{t + u}{2} & t + u \end{vmatrix}$ c'est à dire $(t + u)x + 2py = (t + u)\left(\dfrac{t^2 + u^2}{4p} + p\right)$.

Les coordonnées $(x_1, y_1)$ de $C_1$ vérifient donc :

$$\begin{cases} (t + u)x_1 + 2py_1 = (t + u)\left(\dfrac{t^2 + u^2}{4p} + p\right) \\ (u + v)x_1 + 2p)y_1 = (u + v)\left(\dfrac{u^2 + v^2}{4p} + p\right). \end{cases}$$

On en déduit $x_1 = p + \frac{1}{4p}(t^2 + u^2 + v^2 + tu + uv + vt)$

De même l'abscisse $x_2$ du centre $C_2$ du cercle circonscrit au triangle $M(u)M(v)M(w)$ est $x_2 = p + \frac{1}{4p}(u^2 + v^2 + w^2 + uv + vw + wu)$.

Si les quatre points sont cocycliques, alors $x_1 = x_2$ et on a $t^2+tu+vt = w^2+vw+wu$. Cette relation s'écrit aussi $t^2 - w^2 + u(t-w) + v(t-w) = 0$, c'est à dire $t+u+v+w = 0$.

On en déduit comme dans la première question que l'isobarycentre des points $M(t), M(u), M(v), M(v)$ est situé sur l'axe $(Ox)$.

**Exercice 2.41.** *ENSAM PSI 2008, ODT page 31, RMS page 158*

(Avec Maple)

Soient $\lambda$ un réel strictement positif et $\Gamma_\lambda$ le graphe de la fonction $f_\lambda\colon x \mapsto \dfrac{\ln\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{1+x^2}$.

1) Sur un même graphique tracer les courbes $\Gamma_\lambda$ pour différentes valeurs de $\lambda > 0$.

2) Déterminer une équation de la tangente $D_\lambda$ à $\Gamma_\lambda$ au point d'abscisse $a > 0$.

3) Montrer que les droites $D_\lambda$ sont concourantes en un point $M(a)$ que l'on déterminera.

4) Tracer le lieu des points $M(a)$.

## Solution

1) Avec les instructions

```
f:=(lambda,x)->ln(x/lambda)/(1+x^2);
plot([f(1,x),f(2,x),f(3,x)],x=0.01..10,color=[green,blue,red]);
```

on obtient le tracé suivant :

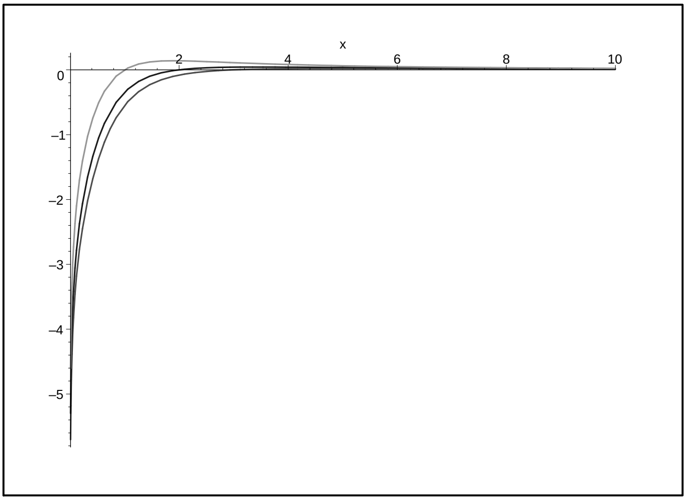


**FIG. 0.5.** Les courbes d'équation $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ et $y = f_3(x)$.

2) $f_\lambda$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'_\lambda(x) = \frac{1+x^2-2x^2\ln(x/\lambda)}{x(1+x^2)^2}.$$

Une équation de la tangente $D_\lambda$ au point d'abscisse $a>0$ est $y = f_\lambda(a)+f'_\lambda(a)(x-a)$, soit :

$$y = \frac{\ln(a/\lambda)}{1+a^2} + \frac{1+a^2-2a^2\ln(a/\lambda)}{a(1+a^2)^2}(x-a).$$

3) Avec Maple on définit la dérivée de $f_\lambda$ par `f1` :=D[2](f) ; puis l'équation de la tangente $D_\lambda$ au point d'abscisse $a$ :

```
y:=(lambda,x)->f(lambda,a)+f1(lambda,a)*(x-a)
```

L'abscisse du point d'intersection de $D_\lambda$ et $D_\mu$ est abtenue à l'aide de

```
solve({y(lambda,x)=y(mu,x)},x);
```

On obtient grâce à Maple $x = \dfrac{1+3a^2}{2a}$. L'ordonnée est obtenue grâce à :

```
simplify(y(lambda,(1+3*a^2)/(2*a));
```

On obtient $y = \dfrac{1}{2a^2}$.

4) Il s'agit de la courbe définie par la paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1+3t^2}{2t} \\ y(t) = \dfrac{1}{2t^2} \end{cases} \quad (t \in ]0,+\infty[).$$

Nous nous contenterons du tracé fourni par Maple :

```
\plot([(1+3*t^2)/(2*t),1/(2*t^2),t=0.2..10],thickness=3);
```

La courbe présente deux branches infinies :

Lorsque $t$ tend vers $+\infty$ $x(t)$ tend vers $+\infty$ et $y(t)$ tend vers $0$. L'axe $Ox$ est asymptote à la courbe.

Lorsque $t$ tend vers $0$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent tous deux vers $+\infty$ et $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{t(1+3t^2)}$ tend vers $+\infty$. La courbe présente une branche parabolique dans la direction de l'axe $Oy$.

**Exercice 2.42.** *Mines d'Ales PC 2008, ODT page 31*

> Soient $a$, $b$, $A$ et $B$ des réels strictement positifs, $E$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ et $H$ l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{B^2}=1$.
>
> 1) A quelle condition l'ellipse et l'hyperboles ont-elles les mêmes foyers ?
>
> 2) Dans ce cas calculer les vecteurs tangents aux points d'intersection de $(E)$ et de $(H)$. Montrer qu'en ces points les tangentes à $E$ et à $H$ sont orthogonales.

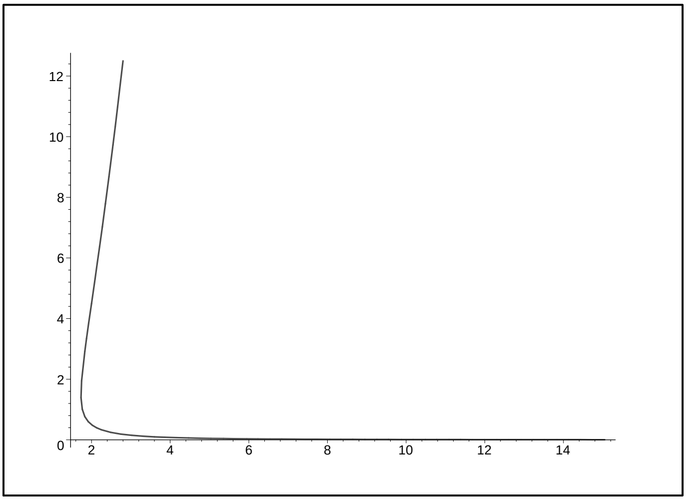


**FIG. 0.6.** La courbe définie par $x(t) = \dfrac{1+3t^2}{2t}, y(t) = \dfrac{1}{2t^2}$.

## Solution

Nous supposerons $a > b$. Les foyers de l'ellipse sont les points $F_1 = (c_1, 0)$ et $F_1' = (-c_1, 0)$, avec $c_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$ tandis que les foyers de l'hyperbole sont les points $F_2 = (c_2, 0)$ et $F_2' = (-c_2, 0)$, avec $c_2 = \sqrt{A^2 + B^2}$. Pour que les foyers coïncident, il faut et il suffit que $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$, ce que nous supposerons dans la suite.

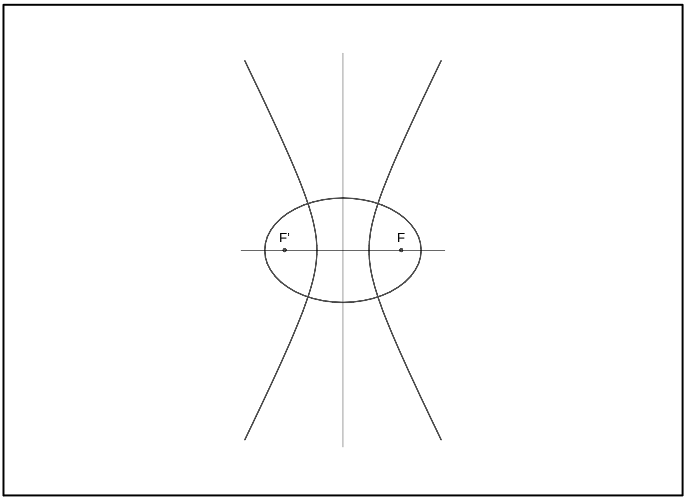


**FIG. 0.7.** L'ellipse $E$, l'hyperbole $H$ et leurs foyers communs $F$ et $F'$.

Un point $M_0 = (x_0, y_0)$ du plan est situé sur $E$ et $H$ si et seulement si

$$\begin{cases} b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2 \\ B^2x_0^2 - A^2y_0^2 = A^2B^2. \end{cases}$$

On en déduit que

$$x_0^2 = a^2A^2\frac{b^2+B^2}{b^2A^2+a^2B^2} \text{ et } y_0^2 = b^2B^2\frac{a^2-A^2}{b^2A^2+a^2B^2} = b^2B^2\frac{b^2+B^2}{b^2A^2+a^2B^2}.$$

L'intersection de $E$ et de $H$ est donc formée de quatre points : le point

$$\left(aA\sqrt{\frac{b^2+B^2}{b^2A^2+a^2B^2}}, bB\sqrt{\frac{b^2+B^2}{b^2A^2+a^2B^2}}\right)$$

et les points que l'on obtient par symétrie par rapport aux axes $(Ox)$ et $(Oy)$ et par rapport à $O$.

Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ l'un de ces quatre points.

Rappelons que la tangente en un point régulier $M_0 = (x_0, y_0)$ d'une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ où $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est la droite d'équation $(x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Il en résulte qu'une équation de la tangente à l'ellipse au point $M_0$ est $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ et qu'une équation de la tangente à l'hyperbole $\dfrac{xx_0}{A^2} - \dfrac{yy_0}{B^2} = 1$.

Ces droites sont respectivement dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u} = \left(-\dfrac{y_0}{b^2}, \dfrac{x_0}{a^2}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{y_0}{B^2}, \dfrac{x_0}{A^2}\right)$.

Le produit scalaire de ces deux vecteurs est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= -\frac{y_0^2}{b^2B^2} + \frac{x_0^2}{a^2A^2} \\ &= -\frac{b^2+B^2}{b^2A^2+a^2B^2} + \frac{b^2+B^2}{b^2A^2+a^2B^2} = 0. \end{aligned}$$

Les tangentes à $E$ et $H$ en $M_0$ sont donc orthogonales.

**Exercice 2.43.** *CCP PSI 2008, ODT page 27*

> Soit $C$ la courbe définie par la paramétrisation $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{t^2+t+1} \\ y(t) = \dfrac{3t}{t^2+t+1} \end{cases}$.
>
> 1) Tracer le tableau des variations simultanées de $x$ et de $y$.
>
> 2) Montrer que la courbe est située à l'intérieur d'un carré.
>
> 3) Donner l'allure de $C$.
>
> 4) Donner une équation cartésienne de $C$. Quelle est la nature de $C$ ?

## Solution

1) On a $t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$. Les fonctions $x$ et $y$ sont donc définies sur $\mathbb{R}$. Elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $x'(t)=\dfrac{-3(2t+1)}{(t^2+t+1)^2}$ et $y'(t)=\dfrac{3(1-t^2)}{(t^2+t+1)^2}$.

   On peut alors tracer le tableau des variations :

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $3$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |
| $y'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

2) Le tableau des variations montre que la courbe est située dans le carré $[0,4]\times[-3,1]$.

3) L'origine est un point limite double de la courbe, obtenu d'une part lorsque $t\to+\infty$ et d'autre part lorsque $t\to-\infty$.

   Dans les deux cas on a $\frac{y}{x}=t\to\pm\infty$. La courbe présente une tangente verticale.

4) On peut alors tracer la courbe. Le tracé suivant a été obtenu à l'aide de Maple :

```
x:=t->3/(t^2+t+1);
y:=t->3*t/(t^2+t+1);
plot([x(t),y(t),t=-10..10]);
```

5) Soit $M=(x,y)$ un point de la courbe. On a $t=\frac{y}{x}$, d'où $x=\dfrac{3}{\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{y}{x}+1}$. On en déduit : $x^2\left((\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)=3x$ et donc

$$y^2+xy+x^2-3x=0. \qquad (1)$$

   Le point $M$ est donc situé sur la conique $E$ d'équation $(1)$.

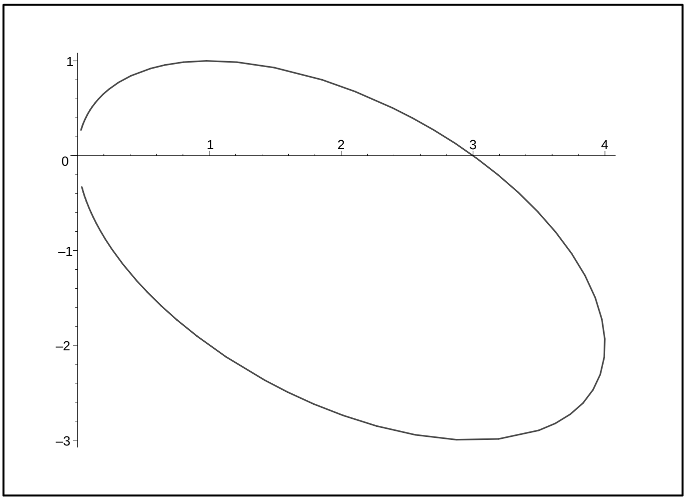


**FIG. 0.8.** $x(t) = \dfrac{1}{t^2+t+1}, y(t) = \dfrac{3t}{t^2+t+1}$.

Réciproquement soit $M = (x, y)$ un point de $E$ distinct de l'origine. On a alors nécessairement $x \neq 0$. Posons $t = \frac{y}{x}$. On a alors $x = \dfrac{3}{\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x} + 1} = \dfrac{1}{t^2+t+1}$ et $y = tx = \dfrac{3t}{t^2+t+1}$.

On a donc $C = E \setminus \{O\}$.

6) La conique $E$ étant bornée, c'est une ellipse. Le tracé semble montrer que c'est une ellipse de centre $C = (2, -1)$. Pour le vérifier plaçons nous dans le repère $R_1 = (C, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Si $(x_1, y_1)$ désignent les coordonnées de $M$ dans le repère $R_1$, les formules de passage du repère initial au repère $R_1$ s'écrivent $x = x_1 + 2$ et $y = y_1 + 2$. Une équation de $E$ dans le repère $R_1$ est donc $(x_1 + 2)^2 + (x_1 + 2)(y_1 - 1) + (y_1 - 1)^2 = 3(x_1 + 2)$, c'est à dire

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = 3. \tag{1}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'équation $(1)$. Rappelons que cela signifie que $x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

La matrice $A$ est symétrique réelle. On détermine facilement ses valeurs propres $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$ ainsi qu'une base orthonormale de vecteurs propres $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec

$$\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}) \text{ et } \overrightarrow{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}).$$

Soit $(X, Y)$ les coordonnées du point $M$ dans le repère $C, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Une équation de l'ellipse $E$ dans ce repère est alors $\dfrac{3X^2}{2} + \dfrac{Y^2}{2} = 3$.

**Exercice 2.44.** *CCP PC 2008, ODT page 25, RMS page 163*

> On identifie $\mathbb{C}$ au plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soient $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1 + z + z^2$, $S = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $C = f(S)$.
>
> 1) Déterminer une équation polaire de $C$.
> 2) Tracer la courbe $C$.
> 3) Exprimer la longueur de $C$ à l'aide d'une intégrale.

## Solution

1) Le point d'affixe $z$ appartient à $S$ si et seulement si $z = e^{i\theta}$ où $\theta$ est un réel. On a alors $f(z) = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(1 + e^{-i\theta} + e^{i\theta}) = (1 + 2\cos\theta)e^{i\theta}$. Il en résulte que $C$ est la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + 2\cos\theta$.

2) La fonction $\rho\colon\ \theta \mapsto 1 + 2\cos\theta$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme elle est $2\pi$-périodique et paire, la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe $Ox$ et on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
Lorsque $\theta \in [0, \pi]$, on a $\rho'(\theta) = -2\sin\theta \leqslant 0$. On peut dresser le tableau des variations :

| $\theta$ | $0$ | | $-\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho'(\theta)$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ |
| $\rho(\theta)$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

Comme $\rho(0) \neq 0$ et $\rho'(0) = 0$, la tangente à la courbe au point $A = M(0) = (3, 0)$ d'angle polaire $0$ est perpendiculaire à $OA$. Lorsque $\theta$ décrit l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ $\rho$ décroît de $3$ à $0$. Le point $M(\theta$ décrit l'arc $AO$. On arrive en $O$ avec pour tangente la droite d'angle polaire $\frac{2\pi}{3}$. Lorsque $\theta$ décrit l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ $\rho$ décroît de $0$ à $-1$. Le point $M(\theta)$ décrit l'arc $OB$ où $B = \rho(\pi) = (1, 0)$. La tangente au point $B$ est de nouveau perpendiculaire à $OB$.
On obtient le tracé suivant :

3) La longueur de la courbe est $L = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\, d\theta$. Or

$$\begin{aligned}
\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 &= (1 + 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta \\
&= 1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta \\
&= 5 + 4\cos\theta.
\end{aligned}$$

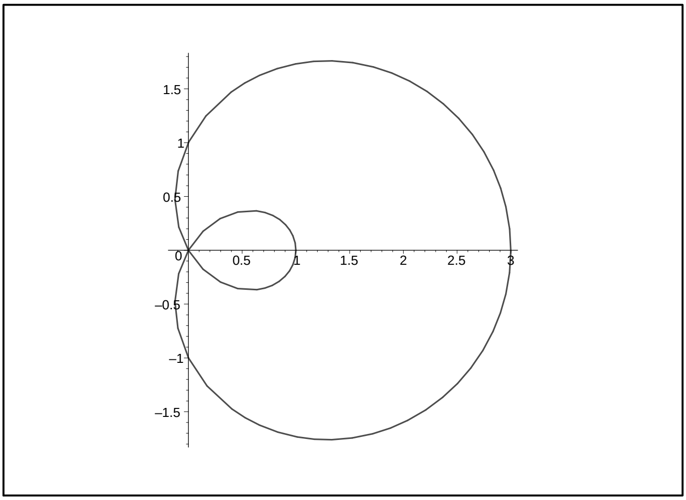


**FIG. 0.9.** La courbe d'équation polaire $\rho = 1 + 2\cos\theta$.

On a donc $L = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{5 + 4\cos\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{5 + 4\cos\theta}\, d\theta.$

## Exercice 2.45. *CCP PC 2008, ODT page 23*

1) Déterminer l'inverse et les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) On munit le plan d'un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ et on désigne par $\alpha$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $A$. A chaque point $M = (x, y)$ du plan on associe le point $M' = (x', y')$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \alpha(\overrightarrow{OM})$. Déterminer l'image $D'$ de la droite $D$ d'équation $D$ d'équation $ax+by+c = 0$ par $\alpha$.

3) Déterminer le point d'intersection de $D$ et $D'$ quand $a - b \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Montrer que ce point est situé sur une droite fixe.
Que peut-on dire de $D$ et de $D'$ lorsque $a - b = 0$ et lorsque $a + b = 0$ ?

4) On note $C$ la conique non dégénérée d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$. Ecrire cette relation sous la forme $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$ où $S$ est une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $L$ appartient à $mcM_{1,2}(\mathbb{R})$ et $f$ un nombre réel.
Montrer que l'image de $C$ par $\alpha$ est aussi une conique non dégénérée.

## Solution

1) La matrice $A$ est inversible puisque son déterminant est égal à $3$ et on a $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
La matrice $A$ est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1.$$

Ses valeurs propres sont donc $1$ et $3$. On voit de façon évidente que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre $3$ est donc la droite vectorielle engendrée par $(1,1)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $-1$ est donc la droite vectorielle engendrée par $(-1,1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ forment une base orthonormale de vecteurs propres de $A$. La matrice de passage de la base canonique $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ à la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Les coordonnées $(x', y')$ de $M'$ vérifient $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

On a donc $x = \frac{1}{3}(2x' - y)$ et $y = \frac{1}{3}(-x' + 2y')$.
Les coordonnées de l'image d'un point $M$ de la droite $D$ vérifient donc la relation $\frac{a}{3}(2x' - y') + \frac{b}{3}(-x' + 2y') + c = 0$, c'est à dire $(2a-b)x' + (2b-a)y' + 3c = 0$.
La droite $D'$ est donc la droite d'équation $(2a-b)x + (2b-a)y + 3c = 0$.

3) Un point $M = (x, y)$ est situé à l'intersection de $D$ et de $D'$ lorsque ses coordonnées vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax + by & = & -c \\ (2a-b)x + (2b-a)y & = & -3c. \end{array}\right.$$

Le déterminant du système est $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ 2a-b & 2b-a \end{vmatrix} = b^2 - a^2$.
Lorsque $\Delta$ est non nul, c'est à dire lorsque $a+b \neq 0$ et $a-b \neq 0$, c'est un système de Cramer.
Déterminons sa solution à l'aide des formules de Cramer :

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -c & b \\ -3c & 2b-a \end{vmatrix} = \frac{c(a+b)}{b^2-a^2} = \frac{c}{b-a}$$

$$y = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & -c \\ 2a-b & -3c \end{vmatrix} = \frac{-c(a+b)}{b^2-a^2} = -\frac{c}{b-a}.$$

Les droites $D$ et $D'$ se coupent en un point situé sur la droite d'équation $x+y=0$.
Lorsque $b=-a$, les droites $D$ et $D'$ sont confondues avec la droite d'équation $x-y=\frac{c}{a}$.
Lorsque $b=a$, $D$ est la droite d'équation $x+y+c=0$ et $D'$ la droite d'équation $x+y+3c=0$. Les droite $D$ et $D'$ sont confondues si $c=0$ et parallèles mais non confondues si $c\neq 0$.

4) On peut écrire l'équation de $C$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0. \tag{1}$$

Rappelons que la conique $C$ est dite non dégénérée lorsque le déterminant $ac-b^2$ de la matrice symétrique $S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est non nul.
L'image de $C$ par $\alpha$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x',y')$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

vérifie l'équation $(1)$.
On a alors $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
En remplaçant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ par leurs expressions en fonction de $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$ dans l'équation $(1)$ on obtient une expression de la forme

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} S' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + L'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0.$$

avec $S' = \frac{1}{9}ASA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4a-4b+c & -2a+5b-2c \\ -2a+5b-2c & a-4b+4c \end{pmatrix}$
et $L' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2d-e & -d+2e \end{pmatrix}$.
C'est à nouveau l'équation d'un conique non dégénérée puisque

$$\det(S') = \frac{1}{81}\det(S)\det(A)^2 = \frac{1}{9}\det(S) \neq 0.$$

**Exercice 2.46.** *Mines-Ponts PC 2008, ODT page 17*

> Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$, avec $(u,v)\neq(0,0)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la droite $D$ d'équation $ux+vy+w=0$ soit tangente à l'ellipse $E$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**Solution** Identifions le plan avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et notons $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Les équations données de l'ellipse et de la droite $D$ sont relatives au repère $(O, e_1, e_2)$.

Posons $E_1 = ae_1$ et $E_2 = be_2$. Si $(x, y)$ sont les coordonnées d'un point $M$ dans le repère $(O, e_2, e_2)$, alors les coordonnées de $M$ dans le repère $R = (0, E_1, E_2)$ sont $X = \frac{x}{a}$ et $Y = \frac{y}{b}$. Dans le repère $R$, $E$ est définie par l'équation $X^2 + Y^2 = 1$ tandis que la droite $D$ est définie par l'équation $auX + bvY = w$.

Munissons alors $\mathbb{R}^2$ de sa structure d'espace euclidien pour laquelle $(E_1, E_2)$ est une base orthonormale. L'ellipse $E$ est alors le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Pour que $D$ soit tangente au cercle, il faut et il suffit que la distance $d(O, D)$ de $O$ à $D$ soit égale à 1. Or on sait que $d(O, D) = \dfrac{|w|}{\sqrt{a^2u^2 + b^2v^2}}$. Il en résulte que $D$ est tangente à $E$ si et seulement $a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$.

**Exercice 2.47.** *Centrale-Supélec PC 2008, RMS page 149*

> Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique d'équation $x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x - 16y + 7 = 0$.

**Solution** La matrice associée à la partie quadratique de l'équation $x^2 + 6xy + 9y^2$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $(1-\lambda)(9-\lambda) - 9 = \lambda(\lambda - 10)$. Ses valeurs propres sont donc $\lambda = 0$ et $\lambda = 10$. Les sous-espace propres associés sont des droites vectorielle et elles sont orthogonales puisque $A$ est symétrique réelle. On voit de façon évidente que le sous-espace propre associé à la valeur propre $0$ est la droite vectorielle engendrée par $(3, -1)$ et on en déduit que le sous-espace propre associé à la valeur propre $10$ est la droite vectorielle engendrée par $(1, 3)$.

Posons $u = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$ et $u = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$. La base $(u, v)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de $A$. La matrice de passage de la base canonique à la base $(u, v)$ est $P = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Désignons par $(x, y)$ les coordonnées d'un point $M$ dans le repère initiale, et par $(X, Y)$ ses coordonnées dans la repère $(O, u, v)$. On a alors $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3X + Y)$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-X + 3Y)$ et $x^2 + 6xy + 9y^2 = 10Y^2$. Dans le repère $R$ la conique est définie par l'équation

$$10Y^2 - 2\sqrt{10}X - 6\sqrt{10}Y + 7 = 0.$$

L'équation s'écrit encore $10\left(Y - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 2\sqrt{10}\left(X + \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) = 0$. Soit $\Omega$ le point du plan de coordonnées $\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Dans le repère $(\Omega, u, v)$ il s'agit de la conique d'équation $X = \dfrac{\sqrt{10}}{2}Y^2$. C'est une parabole de sommet $\Omega$ et d'axe $\Omega X$.

**Exercice 2.48.** *Centrale-Supélec PC 2008, RMS page 149*

(Avec Maple)

Soit $C$ le support de l'application $F\colon t \mapsto \left(\sqrt{1+\sin(2t)} + \sqrt{1-\sin(2t)}\right) e^{it}$.

1) Tracer $C$. Quelles sont les symétries de $C$ ?

2) Soit la courbe $C_1$ obtenue lorsque $t$ décrit $[-\pi/4, \pi/4]$. Montrer que $C_1$ est un demi-cercle dont on déterminera le centre.

3) Montrer que $C$ est la réunion de quatre courbes $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ qui se déduisent de l'une d'entre elle par des rotations que l'on précisera.

## Solution

1) Il s'agit de la courbe d'équation polaire $r = \sqrt{1+\sin(2t)} + \sqrt{1-\sin(2t)}$. On obtient aisément le tracé à l'aide de Maple :

```
plot([(sqrt(1+sin(2*t))+sqrt(1-sin(2*t)))*cos(t),
(sqrt(1+sin(2*t))+sqrt(1-sin(2*t)))*sin(t),
t=-Pi..Pi],
scaling=constrained,thickness=3);
```

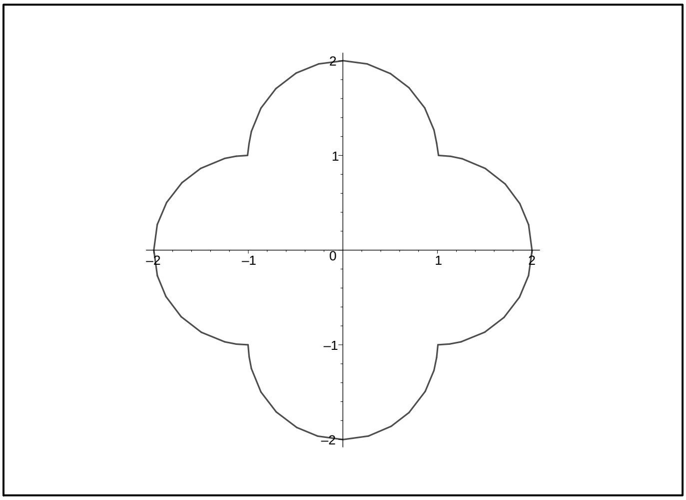


**FIG. 0.10.** La courbe d'équation polaire $r(t) = \sqrt{1+\sin(2t)} + \sqrt{1-\sin(2t)}$.

2) La fonction $r$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\pi$-périodique. La courbe $C$ présente une symétrie par rapport à l'origine $O$ et il suffit d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi]$.
On a de plus $r(\pi - t) = r(t)$. La courbe est symétrique par rapport à l'axe $Oy$ et on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$.

Comme elle est symétrique par rapport au point $O$ et par rapport à l'axe $Oy$, elle est aussi symétrique par rapport à l'axe $Ox$.
On a aussi $r\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = r(t)$. La courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice. Comme elle est symétrique par rapport au point $O$, elle est aussi symétrique par rapport à la seconde bissectrice.
On a enfin $r\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = r(t)$. La courbe est donc invariante par rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3) Soit $C_1$ l'arc de courbe obtenu lorsque $t$ décrit l'intervalle $I_1 = [-\pi/4, \pi/4]$.
Posons $t = \frac{\pi}{4} - u$. On a alors :

$$\begin{aligned} r(t) = r\left(\frac{\pi}{4}-u\right) &= \sqrt{1+\sin(\pi/2-2u)} + \sqrt{1-\sin(\pi/2-2u)} \\ &= \sqrt{1+\cos(2u)} + \sqrt{1-\cos(2u)} \\ &= \sqrt{2\cos^2 u} + \sqrt{2\sin^2 u} \\ &= \sqrt{2}(\cos u + \sin u) \end{aligned}$$

puisque $u \in [0, \pi/2]$. On en déduit que $r(t) = 2\cos(\pi/4 - u) = 2\cos t$.
On a donc $r^2(t) = 2r(t)\cos(t)$. L'arc de courbe $C_1$ est donc contenu dans la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 2x$, c'est à dire $(x-1)^2 + y^2 = 1$. C'est donc un demi-cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon $1$.

4) Comme $C$ est invariante par rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, on voit que $C$ est la réunion de $C_1$ et des demi-cercles qui se déduisent de $C_1$ par les rotations de centre $O$ et d'angles $\frac{\pi}{2}$, $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$.

**Exercice 2.49.** *Centrale-Supélec PC 2008, RMS page 149*

Soit $C$ la courbe définie en coordonnées polaires par : $r(t) = \cos t$ et $\theta(t) = t - \sin t$.

1) Tracer la courbe $C$. Justifier les symétries.
2) Déterminer les points irréguliers.
3) Déterminer les points doubles, les paramètres ainsi que les tangentes en ces points.
4) Calculer la courbure aux points doubles.

## Solution

1) Interprétons le paramètre $t$ et le point de coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$ comme la position d'un point $M$ à l'instant $t$. La courbe $C$ est alors la trajectoire du point $M$.
Les fonctions $\theta$ et $r$ sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ \theta(t+2\pi) = \theta(t)$ et $r(t+2\pi) = r(t)$. La courbe est décrite périodiquement avec une période fréquence d'amplitude $2\pi$.

On a de plus $\theta(-t) = -\theta(t)$ et $r(-t) = r(t)$. La position de $M$ à l'instant $-t$ est la symétrique, par rapport à l'axe $Ox$, de sa position à l'instant $t$. Il suffit donc d'étudier la courbe $C$ lorsque $t$ décrit l'intervalle $range 0\pi$ et de compléter par une symétrie par rapport à l'axe $Oy$.
A l'aide des instruction suivantes :

```
plot([cos(t),t-sin(t),t=-Pi..Pi],
coords=polar,thickness=3,
tickmarks=[0,0],scaling=constrained);
```

Maple fournit le tracé suivant :

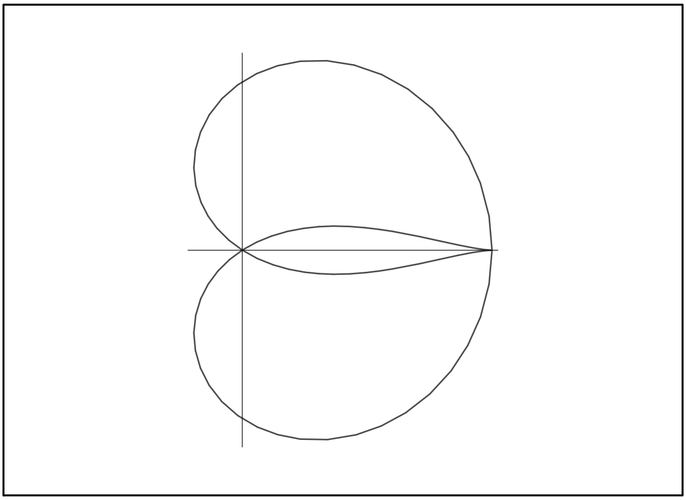

**FIG. 0.11.** La courbe d'équations polaires $r(t) = \cos t,\ \theta(t) = t - \sin t$.

2) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $r'(t) = -\sin t$ et $\theta'(t) = 1 - \cos t$. Les points irréguliers (on dit aussi stationnaires de $C$ sont les points en lesquels s'annulent simultanément $r'$ et $\theta'$. Il s'agit donc des points de paramètre $t = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire des points du plan de coordonnées $(1, 0)$.
3) Cherchons les points doubles de l'arc de courbe obtenu lorsque $t$ décrit l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Cela revient à déterminer les réels $t, u \in ]-\pi, \pi]$ tels que $t \neq u$, $r(t)\cos(\theta(t)) = r(u)\cos(\theta(u))$ et $r(t)\sin(\theta(t)) = r(u)\sin(\theta(u))$. On peut évidemment supposer $t < u$.
On a alors $r^2(t) = r^2(u)$, c'est à dire $\cos^2(t) = \cos^2(u)$ et donc $\cos t = \pm \cos u$.
   - Si $\cos t = \cos u$, on a $t = -u$ avec $u \in [0, \pi[$. Comme $t \neq u$, on a nécessairement $t \neq 0$ et $u \neq 0$. On a alors $\theta(t) = -\theta(u)$ et donc $\sin(\theta(t)) = -\sin(\theta(u)) \neq 0$. On en déduit que $\cos(t) = -\cos u$ et donc

$\cos t = \cos u = 0$ et finalement $t = -\frac{\pi}{2}$ et $u = \frac{\pi}{2}$. Le point de la courbe correspondant est l'origine $O$.

- Si $\cos t \neq \cos u$, alors $\cos(t) = -\cos(u) \neq$. On en déduit $\sin t = \sin u$ et donc puisque $t \neq u$, $u+t = \pi$. Mais alors $\cos t = \cos u$, contrairement à l'hypothèse.

L'origine $0$ est donc le seul point double (correspondant à une valeur de $t$ appartenant à $]-\pi, \pi]$.
Pour $t = +\frac{\pi}{2}$, on a $r(t) = 0$ et $\theta(t) = \frac{\pi}{2} - 1$. La tangente est donc la droite passant par $O$ et d'angle polaire $\frac{\pi}{2} - 1$.
Pour $t = +\frac{\pi}{2}$, on a $r(t) = 0$ et $\theta(t) = \frac{\pi}{2} + 1$. La tangente est donc la droite passant par $O$ et d'angle polaire $\frac{\pi}{2} + 1$.

4) A l'aide de Maple calculons la courbure au point de paramètre $\frac{\pi}{2}$.
La courbe $C$ est définie par la paramétrisation $x(t) = \cos(t)\sin(t - \sin(t))$, $y(t) = \cos(t)\sin(t - \sin(t))$. On sait que la courbure en un point régulier est donnée par $C = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$.
Commençons par définir $x$ et $y$ :

```
x:=t->cos(t)*cos(t-sin(t));
x:=t->cos(t)*sin(t-sin(t));
```

Calculons maintenant $x'$ et $y'$ et $x'^2 + y'^2$ au point $t = \frac{\pi}{2}$.

```
x1:=D(x);y1:=D(y):A:=simplify(x1(Pi/2)^2+y1(Pi/2)^2));
```

Maple retourne $A := -2\cos(1)^2$. Comme $A$ est non nul, le point de paramètre $\frac{\pi}{2}$ est régulier.
Définissons maintenant $x''$ et $y''$ et calculons $x'y'' - x''y'$ :

```
x2:=D(x1);y2:=D(y1);
B:=simplify(x1(Pi/2)*y2(Pi/2)-x2(Pi/2)*y1(Pi/2));
```

Maple retourne $B := -\sin(1)^2$.
On en déduit la courbure $C = \dfrac{B}{A^{3/2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sin(1)}$.
Par un calcul analogue au point de paramètre $-\frac{\pi}{2}$ on obtient la courbure $C = +\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sin(1)}$.

**Exercice 2.50.** *Centrale-Supélec PC 2008, RMS page 149*

> Soient $p$ un réel strictement positif et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Une droite variable passant par le foyer $F$ (et différente de l'axe des abscisses) rencontre $\mathcal{P}$ en deux points $M_1$ et $M_2$. Soit $C$ le centre du cercle circonscrit au triangle $OM_1M_2$. Déterminer le lieu des points $C$.

**Solution** Le foyer de la parabole est le point de coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$. Une droite passant par $F$ et non parallèle à l'axe $Ox$ a une équation de la forme $x = \frac{p}{2} + ty$, où $t$ est un nombre réel. Cette droite coupe la parabole en deux points $M_1$ et $M_2$ dont les ordonnées sont les racines $y_1$ et $y_2$ du polynôme $P(y) = \frac{1}{2p}y^2 - ty - \frac{p}{2}$. Notons que $P$ à deux racines réelles distinctes puisque son discriminant $\Delta = t^2 + 1$ est strictement positif. Les abscisses des points $M_1$ et $M_2$ sont alors $x_1 = \dfrac{y_1^2}{2p}$ et $x_1 = \dfrac{y_1^2}{2p}$.

Le centre du cercle circonscrit au triangle $OM_1M_2$ est équidistant des points $O$, $M_1$ et $M_2$. Il est donc situé à l'intersection des médiatrices de $OM_1$ et $OM_2$.

La médiatrice de $OM1$ est la droite passant par le point $(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}$ et orthogonale au vecteur $(x_1, y_1)$. Il s'agit donc de la droite d'équation $(x - \frac{x_1}{2}x_1 + (y - \frac{y_1}{2})y_1 = 0$, ou encore $xx_1 + yy_1 = \dfrac{x_1^2 + y_1^2}{2}$.

De même la médiatrice de $OM_2$ est la droite d'équation $xx_2 + yy_2 = \dfrac{x_2^2 + y_2^2}{2}$.

Les coordonnées $(x, y)$ de $C$ sont solution du système :

$$\begin{cases} xx_1 + yy_1 = \dfrac{x_1^2 + y_1^2}{2}, \\ xx_2 + yy_2 = \dfrac{x_2^2 + y_2^2}{2}. \end{cases}$$

On obtient (en s'aidant d'un logiciel de calcul formel par exemple) :

$$x = pt^2 + \frac{5p}{4},\ y = \frac{p}{4}t. \tag{1}$$

Le lieu du point $C$ est donc la parabole définie par la paramétrisation $(1)$. C'est aussi la parabole d'équation $x = \dfrac{16}{p}y^2 + \dfrac{5p}{4}$.

**Exercice 2.51.** *Centrale-Supélec PC 2008, RMS page 149*

> Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a > 0$ et $b < 0$, $C_1$ le cercle de centre $A = (a, 0)$ passant par $O$, $C_2$ le cercle de centre $B = (b, 0)$ passant par $O$. Déterminer l'ensemble des points $M$ équidistants de $C_1$ et $C_2$.

**Solution**

Commençons par un rappel de géométrie. Soit $A$ un réel strictement positif et $F$ et $F'$ deux points distincts du plan tels d(F,F')=2C. L'ensemble des points $M$ du plan tels que $d(M, F) - d(M, F') = 2A$ est une branche d'hyperbole dont le centre est le milieu $\Omega$ de $FF'$ et dont l'excentricité est $\dfrac{C}{A}$.

Revenons à l'exercice. Sans perte de généralité on peut supposer $a + b \geqslant 0$.

Commençons par définir la distance $d(M,C)$ d'un point $M$ du plan à un cercle $C$ de centre $\Omega$ et de rayon $R>0$, c'est à dire la plus petites des distances de $M$ aux points de $C$.

Désignons par $d$ la distance de $M$ au centre du cercle. Choisissons un repère orthonormé du plan tel que l'origine $O$ du repère soit le centre du cercle $C$ et tel que $M$ soit le point d'abscisse $d \geqslant 0$ situé sur l'axe $Ox$. Le cercle $C$ est alors défini par la paramétrisation $\theta \mapsto P(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$. Le carrée de la distance de $M$ à $P(\theta)$ est alors

$$q(\theta) = (R\cos\theta - d)^2 + R^2\sin^2\theta = R^2 - 2Rd\cos\theta + d^2.$$

La fonction $q$ est $2\pi$-périodique et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $q'(\theta) = 2RD\sin(\theta)$. On en déduit que le minimum de la fonction $q$ est obtenu lorsque $\theta = 0$, et on a alors $q(0) = R^2 - 2Rd + d^2 = (R-d)^2$. Il en résulte que la distance de $M$ à $C$ est $d(M,C) = \sqrt{(R-d)^2} = |R-d|$.

Soit $F$ l'ensemble des points du plan équidistants de $C_1$ et $C_2$, $D_1$ le disque fermé limité par $C_1$, $D_2$ le disque fermé limité par $C_2$ et $U$ le complémentaire de la réunion des disques ouverts limités par $C_1$ et $C_2$.

Soit $M \in U$. La distance de $M$ à $C_1$ est $d(A,M) - a$ et la distance de $M$ à $C_2$ est $d(B,M) + b$.Pour que $M$ appartienne à $F$, il faut et il suffit que $d(A,M) - a = d(B,M) + b$, c'est à dire $d(A,M) - d(B,M) = a + b$. Si $a + b = 0$, alors l'ensemble $E \cap U$ est la médiatrice du segment $AB$. Si $a + b > 0$, alors l'ensemble l'ensemble $E \cap U$ est la branche $H$ d'une hyperbole de foyers $A$ et $B$, d'excentricité $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Soit maintenant $M \in D_1$. Pour que $M$ appartienne à $F$, il faut et il suffit que $a - d(A,M) = d(B,M) + b$, c'est à dire que $d(B,M) + d(A,M) = a - b$. Comme $a - b$ est précisément la distance de $A$ à $B$, il s'agit des points du segment $AB$ qui appartiennent au disque $D_1$. Il s'agit donc du segment $OA$.

On voit de même que les points de $F$ situés dans le disque $D_2$ sont les points du segment $OB$.

L'ensemble $H$ est donc la réunion de $H$ et du segment $AB$.

**Exercice 2.52.** *Centrale-Supélec PSI 2008, RMS page 140*

> Soient $P$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$ et $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ P(x) = P(y)\}$. Montrer que $S$ est la réunion d'une droite et d'une courbe. Etudier cette courbe.

**Solution** L'ensemble $S$ est constitué des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = y^3 - 2y^2 + y + 1.$$

Cette relation s'écrit encore $(x-y)(x^2 + xy + y^2 - 2(x+y) + 1) = 0$. C'est donc la réunion de la droite d'équation $y = x$ et de la conique $C$ d'équation $x^2 + xy + y^2 - 2(x+y) + 1 = 0$.

La matrice symétrique réelle associée à $C$ est $A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$. On voit de façon évidente que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{3}{2}$ est la droite vectorielle engendrée par $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}$ est la droite vectorielle engendrée par $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

La matrice de passage de la base initiale à la base $(u,v)$ est $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $(x,y)$ les coordonnées d'un point $M$ dans le repère initial, et $(X,Y)$ ses coordonnées dans le repère $(O,u,v)$. On alors $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $x^2+xy+y^2 = \frac{3X^2}{2} + \frac{Y^2}{2}$. Une équation de $C$ dans le repère $(O,u,v)$ est donc

$$\frac{3X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} - \frac{4}{\sqrt{2}}X = 0.$$

L'équation s'écrit encore $\frac{3}{2}\left(X - \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{Y^2}{2} = \frac{4}{3}$.

Soit $\Omega$ le point du plan de coordonnées $\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, 0\right)$. Dans le repère orthonomal $(\Omega,u,v)$, $C$ est l'ellipse d'équation $\frac{3X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} = \frac{4}{3}$.

**Exercice 2.53.** *Mines-Ponts PC 2008, RMS page 109*

> Soient $C$ un cercle de centre $O$ et $A$ un point de $C$. A chaque point $M$ de $(C)$ on associe la projection orthogonale $P$ de $A$ sur la tangente en $M$ à $C$. Déterminer le lieu des points $P$ lorsque $M$ décrit $C$.

## 2.7 SURFACES-QUADRIQUES

**Exercice 2.54.** *EIVP PSI 2008, ODT page 31*

> Identifier la surface $S$ d'équation $x^2+y^2-2z^2 = 1$. Est-ce une surface de révolution ? Existe-il un point de la surface en lequel le vecteur $\overrightarrow{V} = (1,2,6)$ est normal au plan tangent ?

**Solution** La surface est un hyperboloïde à une nappe. C'est une surface de révolution d'axe $Oz$ car si $M = (x,y,z)$ est un point de $S$, et si $M' = (x',y',z')$ est l'image de $M$ par une rotation d'axe $Oz$, on a $z' = z$ et $x'^2+y'^2 = x^2+y^2$. On a donc $x'^2+y'^2-2z'^2 = 1$, ce qui montre que $M'$ appartient à $S$.

Le plan tangent en un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$de $S$ est le plan normal au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$. Pour que ce plan soit aussi normal au vecteur $(1, 2, 6)$, il faut et il suffit qu'il un réel $\lambda$ non nul tel que $(x_0, y_0, -z_0) = (\lambda, 2\lambda, 6\lambda)$. On doit donc avoir $\lambda^2(1 + 4 - 72) = 1$, ce qui est impossible.

**Exercice 2.55.** *ENSAM PSI 2008, ODT page 31*

> (Avec Maple) Paramétrer et tracer la courbe d'intersection de la sphère de centre $O$ et de rayon 1, et du cylindre dont une section droite est le cercle de centre $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

**Solution** Notons $\Gamma$ cette intersection. Un point $M = (x, y, z)$ appartient à $\Gamma$ si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ou encore $x^2 + y^2 - x = 0$.

Paramétrons la sphère de la manière usuelle :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z = \sin(\varphi) \end{array}\right. \qquad (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2.\Bigg)$$

Un point $M$ de la sphère appartient au cylindre si et seulement si

$$\cos(\theta)\cos(\varphi) = x = x^2 + y^2 = \cos^2(\varphi).$$

Lorsque $\cos(\varphi) \neq 0$, on a $\cos(\theta) = \cos(\varpi)$, et donc $\sin(\theta) = \pm\cos(\varphi)$.

On a donc

$$x = \cos^2(\varphi), y = \pm\sin(\varphi)\cos(\varphi), z = \sin(\varphi). \tag{1}$$

Les points de $\Gamma$ tels que $\cos(\varphi = 0)$ sont les points $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$.

On constate qu'il vérifient également la relation $(1)$.

Ainsi $\Gamma$ est la réunion des courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ définies par les paramétrages :

$$\Gamma_1 : \quad \left\{\begin{array}{l} x = \cos^2(\varphi) \\ y = \sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ z = \sin(\varphi) \end{array}\right. \qquad \Gamma_1 : \quad \left\{\begin{array}{l} x = \cos^2(\varphi) \\ y = -\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ z = \sin(\varphi) \end{array}\right.$$

En réalité le point de paramètre $\varphi$ situé sur $\Gamma_1$ coïncide avec le point de paramètre $\pi - \theta$ de $\Gamma_2$. On a donc $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$.

Le tracé suivant est obtenu grâce à Maple :

```
A:=implicitplot3d(x^2+y^2+z^2=1,
x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5,z=-1.5..1.5,numpoints=10000):
B:=implicitplot3d(x^2+y^2=x,
x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5,z=-1.5..1.5,numpoints=10000):
```

```
 C:=spacecurve([cos(t)^2,sin(t)*cos(t),sin(t),t=0..2*Pi]
,numpoints=5000,thickness=3,color=blue):
 display3d(A,B,C);
```

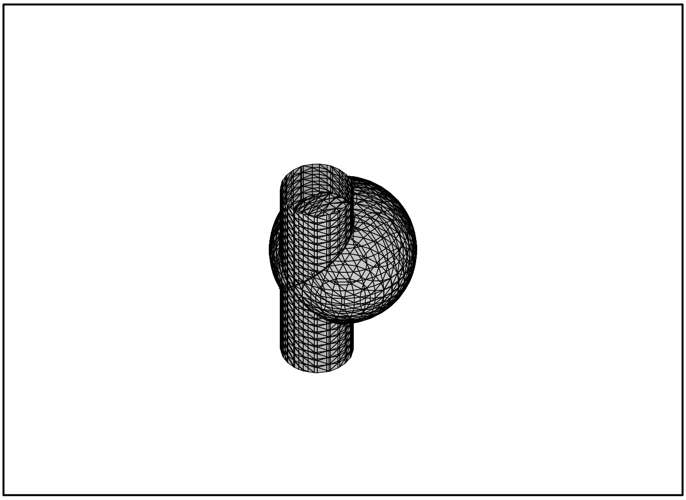

**FIG. 0.12.** La fenêtre de Viviani.

**Exercice 2.56.** *CCP PSI 2008, ODT page 27*

> Déterminer les points $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la surface $S$ d'équation $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4} = 1$ tels que le plan tangent en $M_0$ coupent les axes de coordonnées en trois points $A$, $B$ et $C$ tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{0C}$.

**Solution** La surface $S$ est un ellipsoïde. Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} - 1$. C'est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont le gradient $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{x}{2}, 2y, \frac{z}{2}\right)$ s'annule seulement au point $O = (0,0,0)$. Comme $O$ n'appartient pas à la surface $S$, tous les points de $S$ sont réguliers, et le plan tangent au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $S$ est le plan d'équation $(x - x_0)x_0 + 4(y - y_0)y_0 + (z - z_0)z_0 = 0$, ou encore :

$$xx_0 + 4yy_0 + zz_0 = 2.$$

Ce plan coupe l'axe $Ox$ au point $A$ tel que $\overline{OA} = \frac{2}{x_0}$, l'axe $Oy$ au point $B$ tel que $\overline{OB} = \frac{1}{2y_0}$ et l'axe $Oz$ en un point $C$ tel que $\overline{OC} = \frac{2}{z_0}$.

La relation $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{0C}$ est donc équivalente à : $\frac{2}{x_0} = \frac{1}{2y_0} = \frac{2}{z_0}$, c'est à dire à $x_0 = z_0 = 4y_0$.

On a alors $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2+\frac{z_0^2}{4}=\frac{1}{4}(x_0^2+\frac{x_0^2}{16}+x_0^2)=\frac{33}{48}x_0^2=1$ et donc $x_0=\pm\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{33}}$.

Il existe donc deux points de $S$ vérifiant la condition $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{0C}$.

Ce sont les points $M_0=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{33}}(1,4,1)$ et le point $M_0'=-\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{33}}(1,4,1)$.

**Exercice 2.57.** *Centrale Supélec PC 2007, ODT page 11*

> Donner une équation du cylindre $C$ dont les génératrices dont dirigées par le vecteur $(1,1,1)$ et dont la base est l'intersection des surfaces d'équations $x^2+y^2=2$ et $x^2+y^2+z^2=8$.

**Solution** Désignons par $S_1$ le cylindre d'équation $x^2+y^2=2$, par $S_2$ la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=8$ et par $\Gamma$ l'intersection de $S_1$ et $S_2$.

Soit $M=(x,y,z)$ un point appartenant à $C$. Alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(x+\lambda,y+\lambda,z+\lambda)$ appartient à $\Gamma$, c'est à dire tel que $(x+\lambda)^2+(y+\lambda)^2=2$ et $(x+\lambda)^2+(y+\lambda)^2+(z+\lambda)^2=8$.

On en déduit que $\lambda=-z+\varepsilon\sqrt{6}$ où $\varepsilon=\pm1$, puis que $(x-z+\varepsilon\sqrt{6})^2+(y-z+\varepsilon\sqrt{6})^2=2$. Cette dernière relation s'écrit encore $(x-z)^2+(y-z)^2+2\varepsilon\sqrt{6}(x+y-2z)+12=2$. Il en résulte que $M$ appartient à la réunion des deux surfaces d'équations

$$(x-z)^2+(y-z)^2+2\sqrt{6}(x+y-2z)+10=0$$

et

$$(x-z)^2+(y-z)^2-2\sqrt{6}(x+y-2z)+10=0.$$

Le cylindre $C$ est donc contenu dans la surface d'équation $(1)$ :

$$((x-z)^2+(y-z)^2+2\sqrt{6}(x+y-2z)+10)((x-z)^2+(y-z)^2-2\sqrt{6}(x+y-2z)+10)=0.$$

Réciproquement soit $M=(x,y,z)$ un point appartenant à la surface d'équation $(1)$. On a alors $(x-z)^2+(y-z)^2+2\varepsilon\sqrt{6}(x+y-2z)+10=0$ où $\varepsilon=\pm1$. Posons $\lambda=-z+\varepsilon\sqrt{6}$.

On a

$$\begin{aligned}(x+\lambda)^2+(y+\lambda)^2&=(x-z+\varepsilon\sqrt{6})^2+(y-z+\varepsilon\sqrt{6})^2\\&=(x-z)^2+(y-z)^2+2\varepsilon\sqrt{6}(x+y-2z)+12\\&=2.\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}(x+\lambda)^2+(y+\lambda)^2+(z+\lambda)^2&=2+(z+\lambda)^2\\&=2+6=8\end{aligned}$$

La droite passant par $M$ et dirigée par le vecteur $(1,1,1)$ rencontre donc la courbe $\Gamma$ et il en résulte que $C$ est la surface d'équation $(1)$.

**Exercice 2.58.** *CCP PC 2007, ODT page 21*

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

1) Quelles sont les surfaces $S_1$ et $S_2$ d'équation respective $x^2 + y^2 = 1$ et $y^2 + 4z^2 = 1$.

2) Soient $P_1$ le plan d'équation $2z - x = 0$ et $P_2$ le plan d'équation $2z + x = 0$. Montrer que

$$S_1 \cap S_2 = (S_1 \cap P_1) \cup (S_1 \cap P_2).$$

Dans la suite on pose $C = S_1 \cap S_2$.

3) Déterminer les tangentes à $C$ en $A = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ et en $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)$ puis trouver un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à ces deux tangentes.

## Solution

1) La surface $S_1$ est un cylindre de révolution d'axe $Oz$ et la surface $S_2$ un cylindre elliptique dont les génératrices sont parallèles à l'axe $Ox$.

2) Le système d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4z^2 - x^2 = 0 \end{cases}$

Il en résulte que $S_1 \cap S_2$ est aussi l'intersection de $S_1$ et de la surface $S_3$ d'équation $4z^2 - x_2 = 0$. Comme $4z^2 - x^2 = (2z - x)(2z + x)$, $S_3$ est la réunion des plans $P_1$ et $P_2$ d'équations respectives $2z - x = 0$ et $2z + x = 0$. On en déduit que

$$S_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_3 = S_1 \cap (P_1 \cup P_2) = (S_1 \cap P_1) \cup (S_1 \cap P_2).$$

3) Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et on a $\mathrm{Grad}(f)(M) = (2x, 2y, 0)$. En particulier $\mathrm{Grad}(f)(A) = (2, 0, 0)$. Le plan tangent à $S_1$ au point $A$ est donc le plan d'équation $x - 1 = 0$.

Le point $A$ appartient à $S_1 \cap P_1$ et le plan d'équation $x - 1 = 0$ n'est pas parallèle à $P_1$. La tangente à $C$ au point $A$ est donc l'intersection de $P_1$ et du plan d'équation $x - 1 = 0$.

On a de même $\mathrm{Grad}(f)(B) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. Le plan tangent à $S_1$ au point $B$ est donc le plan d'équation $x + y - \sqrt{2} = 0$. Comme $B$ appartient à $S_1 \cap P_2$, la tangente à $C$ au point $B$ est l'intersection de $P_2$ et du plan d'équation $x + y - \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 0$.

Déterminons la perpendiculaire commune à ces deux tangentes :

Un vecteur directeur $u = (x, y, z)$ de la tangente à $C$ au point $A$ est obtenu en résolvant le système linéaire $\begin{cases} x - 2z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ On peut prendre $u = (0, 1, 0)$.

De même un vecteur directeur $v = (x, y, z)$ de la tangente à $C$ au point $B$ est obtenu en résolvant le système $\begin{cases} x + 2z = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$ On peut prendre $v = (-2, 2, 1)$.

La perpendiculaire commune au deux tangentes est dirigée par le produit vectoriel $w = u \wedge v = (0, -1, 2)$.

Il s'agit donc de la droite d'intersection du plan $P$ passant par $A$ et dont la direction est le plan vectoriel engendré par $u$ et $w$, et du plan $P'$ passant par $B$ dont la direction est le plan vectoriel engendré par $v$ et $w$. Une équation de $P$ est

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z-\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire $x-1=0$.
Une équation de $P'$ est

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{\sqrt{2}} & -2 & 0 \\ y-\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & -1 \\ z+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire $5x+4y+2z-4\sqrt{2}=0$.
La perpendiculaire commune est donc définie par le système d'équations

$$\begin{cases} x-1=0, \\ 5x+4y+2z-4\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

**Exercice 2.59.** *CCP PSI 2007, ODT page 25*

On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $(0xyz)$. On désigne par $S$ la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

1) Montrer que l'intersection de $S$ avec un plan parallèle à $x0y$ ne contient aucune droite.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ est orthogonale si et seulement si $S$ contient la droite $D$ d'équations $\begin{cases} x = az+b \\ y = cz+d \end{cases}$.

3) Soit $M = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $S$, $P = (x_0, y_0, 0)$ et $Q = (z_0, 1, 0)$. Déterminer les isométries vectorielles $f$ du plan $xOy$ telles que $f(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OP}$. En déduire les droites passant par $M_0$ et contenues dans $S$.

## Solution

1) Soit $h$ un réel et soit $H = (0,0,h)$. L'intersection de $S$ avec le plan d'équation $z = h$ est le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1+h^2$ dans le plan $(H, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Ce cercle ne contient évidemment aucune droite.

2) Pour que la droite $D$ soit incluse dans $S$, il faut et il suffit que

$$\forall z \in \mathbb{R},\ (az+b)^2+(cz+d)^2-z^2-1=0.$$

Comme

$$P(z) = (az+b)^2+(cz+d)^2-z^2-1 = (a^2+c^2-1)z^2+2(ab+cd)z+(b^2+d^2-1)$$

est un polynôme de la variable $z$, il s'annule pour tout $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, c'est à dire si et seulement si $\begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ b^2 + d^2 = 1, \\ ab + cd = 0. \end{cases}$
Ces conditions signifient très précisément que la matrice $A$ est orthogonale.

3) Comme $x_0^2 + y_0^2 = 1 + z_0^2$, on a $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. De plus $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = x_0^2 + y_0^2$ et $\|\overrightarrow{OQ}\|^2 = 1 + z_0^2$ et donc $\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OQ}\|$. Il existe donc deux isométries du plan $xOy$ qui transforme $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OP}$ : une rotation $r$ de centre $0$ et une symétrie orthogonale $s$ par rapport à une droite. Déterminons $r$ et $s$ par leur matrice respective $R$ et $S$.
La matrice $R$ est de la forme $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. La relation $r(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OP}$ s'écrit matriciellement $R\begin{pmatrix} z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. On en déduit

$$\begin{cases} \cos\theta z_0 - \sin\theta = x_0 \\ \cos\theta + \sin\theta z_0 = y_0 \end{cases}$$

d'où $\cos\theta = \dfrac{z_0x_0 + y_0}{z_0^2 + 1}$ et $\sin\theta = \dfrac{z_0y_0 - x_0}{z_0^2 + 1}$. On a donc :

$$R = \frac{1}{z_0^2 + 1}\begin{pmatrix} z_0x_0 + y_0 & -z_0y_0 + x_0 \\ z_0y_0 - x_0 & z_0x_0 + y_0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $S$ est de la forme $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ et la relation $s(\overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OP}$ s'écrit matriciellement $S\begin{pmatrix} z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. On en déduit

$$\begin{cases} \cos\theta z_0 + \sin\theta = x_0 \\ -\cos\theta + \sin\theta z_0 = y_0 \end{cases}$$

d'où $\cos\theta = \dfrac{z_0x_0 - y_0}{z_0^2 + 1}$ et $\sin\theta = \dfrac{z_0y_0 + x_0}{z_0^2 + 1}$ et

$$S = \frac{1}{z_0^2 + 1}\begin{pmatrix} z_0x_0 - y_0 & z_0y_0 + x_0 \\ z_0y_0 + x_0 & -z_0x_0 + y_0 \end{pmatrix}.$$

On déduit des questions précédentes qu'il existe deux droites passant par $M_0$ et contenues dans $S$ : il s'agit des droites $D$ et $D'$ d'équations respectives :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{z_0^2 + 1}\big((z_0x_0 + y_0)z + x_0 - z_0y_0\big) \\ y = \dfrac{1}{z_0^2 + 1}\big((z_0y_0 - x_0)z + z_0x_0 + y_0\big) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{z_0^2+1}\big((z_0x_0 - y_0)z + z_0y_0 + x_0\big) \\ y = \dfrac{1}{z_0^2+1}\big((z_0y_0 + x_0)z + y_0 - z_0x_0\big) \end{cases}$$

**Exercice 2.60.** *Centrale-Supélec PC 2008, RMS page 149*

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2-2z = 3 \text{ et } 2y-2z+3 = 0\}$.

1) Déterminer la nature de $\Gamma$.

2) Déterminer une équation de la surface engendrée par la rotation de $\Gamma$ autour de l'axe $Oz$.

## Solution

1) La courbe $\Gamma$ est l'intersection d'un paraboloïde de révolution $P$ d'axe $Oz$ (d'équation $x^2 + y^2 - 2z = 3$) et du plan $\Pi$ d'équation $2z - 2y = 3$.
Remarquons que $\Gamma$ est aussi l'intersection du cylindre $C$ d'équation $x^2+y^2-2y = 6$ et du plan $\Pi$. On peut encore écrire l'équation de $C$ sous la forme $x^2+(y-1)^2 = 7$. et sous cette forme on voit qu'il s'agit d'un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à l'axe $Oz$ et coupe le plan $x0y$ au point de coordonnées $(0, 1, 0)$.
On en déduit que la courbe $\Gamma$ est une ellipse.

2) Désignons par $S$ la surface engendrée par la rotation de $\Gamma$ autour de l'axe $Oz$. Soit $M = (x, y, z)$ un point de $S$. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que l'image $M' = (x', y', z')$ de $M$ par la rotation d'angle $\theta$ d'axe $Oz$ appartient à $\Gamma$. On a alors $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ et $z' = z$. On a donc $x^2 + y^2 - 2z = x'^2 + y'^2 - 2z' = 3$, de sorte que $S$ est contenue dans le paraboloïde $P$.
Mais observons que $S$ n'est pas égale à $P$ tout entier. En effet, comme $x'^2 + (y' - 1)^2 = 7$, on a $(y' - 1)^2 \leqslant 7$ et donc $-\sqrt{7}+1 \leqslant y' \leqslant \sqrt{7}+1$. Comme $z = z' = y' + \frac{3}{2}$ on a $-\sqrt{7} + \frac{5}{2} \leqslant z \leqslant \sqrt{7} + \frac{5}{2}$.
Réciproquement soit $M = (x, y, z)$ un point de $P$ tel que $-\sqrt{7}+\frac{5}{2} \leqslant z \leqslant \sqrt{7}+\frac{5}{2}$.
Le nombre réel $y' - 1 = z - \frac{5}{2}$ est compris entre $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$. Il existe donc un réel $x'$ tel que $x'^2 + (y' - 1)^2 = 7$. On a alors $x^2 + y^2 = 3 + 2z = 6 + 2y' = x'^2 + y'^2$.
Le point $M' = (x', y', z)$ appartient donc à $\Gamma$, et $M$ est l'image de $M'$ par une rotation d'axe $Oz$. Le point $M$ appartient donc à $S$.
$S$ est donc l'ensemble des points $(x, y, z)$ de $P$ tels que $-\sqrt{7}+ \frac{5}{2} \leqslant z \leqslant \sqrt{7}+ \frac{5}{2}$.